Dirichlet'n reuna- ja ominaisarvotehtävät erä̈lle ei-hypoelliptiselle differentiaalioperaattorille

Jussi Ilmari Pehkonen
Matematiikan laitos
Helsingin yliopisto

30.5.1996

URN:NBN:fi-fe19991250 (PDF-versio)

Helsingin yliopiston verkkojulkaisut
Helsinki 1999

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Jede Lösung eines Problems ist ein neues Problem
(Johann Wolfgang von Goethe, 1744-1832)

Elliptisten lineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa on keskeisessä asemassa Dirichlet'n reuna-arvotehtävä. Tämän ongelman funktionaalianalyyttinen ratkaiseminen perustuu siihen, että osoitetaan "yleistetyn" tai "heikon" ratkaisun olemassaolo ja mahdollinen yksikäsitteisyys, ja sitten pyritään osoittamaan, että tuollainen ratkaisu on "klassinen" ratkaisu. Klassinen ratkaisu sisältää tarpeellisen määrän osittaisderivaattoja, jotta differentiaaliyhtälössä esiintyvät derivaatat ovat tavallisessa mielessä olemassa. Yleistetyt ratkaisut ovat distribuutioita tai sopivan Sobolev-avaruuden alkioita. Elliptisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokassa reuna-arvotehtävien yleistetyt ratkaisut voidaan usein todistaa klassisiksi, edellyttäen että differentiaaliyhtälössä ja reuna-arvoissa esiintyvät funktiot ovat tarpeeksi säännöllisiä, eli riittävän usein jatkuvasti derivoituvia. Tämä on seuraus siitä, että elliptisille ja yleisemmin hypoelliptisille lineaarisille osittaisdifferentiaalioperaattoreille tunnettujen funktioiden lokaalisesta säännöllisyysominaisuuksista seuraa ratkaisujen lokaali säännöllisyys. Tämä on yksi hypoelliptisille differentiaalioperaattoreille tyypillinen ominaisuus.

Matematiikassa on 1930-luvulta lähtien esiintynyt yrityksiä käsitellä Dirichlet'n reuna-arvotehtävän kaltaisia ongelmia ei-elliptisille differentiaalioperaattoreille. Tuloksista melkoinen osa koskee yleistettyjen ratkaisujen olemassaoloa. Edellä hypoelliptisistä differentiaalioperaattoreista sanottu ei estä sitä mahdollisuutta, että myös joissain tapauksissa ei-hypoelliptiselle differentiaalioperaattorille asetulle reuna-arvotehtävälle annettujen funktioiden globaalisista säännöllisyysominaisuuksista voi seurata yleistettyjen ratkaisuiden globaalinen säännöllisyys. Kirjallisuudessa tunnetaan tähän asti vain vähän tämän suuntaisia säännöllisyystuloksia. Eräille koersiivisille ei-hypoelliptisille vakiokertoimisille differentiaalioperaattoreille tunnetaan säännöllisyystuloksia Dirichlet'n ongelman yleistykselle koko avaruuden tapaukseen ja kaikkien muuttujien suhteen jaksollisten funktioiden luokassa, mistä tarkemmin lähteissä [17] ja [18]. Tietääkseni ensimmäiset säännöllisyystulokset varsinaiselle Dirichlet'n ongelmalle ei-hypoelliptisten differentiaalioperaattoreiden tapauksessa ovat R. Hochmuthin väitöskirjassa [12], ja sitä seuraavissa K. Doppelin ja R. Hochmuthin julkaisussa [5] sekä R. Hochmuthin sille kirjoittamassa jatko-osassa [13]. E. Pehkonen esitti väitöskirjassaan [22] eräälle ei-elliptisten mutta hypoelliptisten differentiaalioperaattoreiden luokalle vastaavia säännöllisyystuloksia käyttämättä hyväkseen lokaaleja säännöllisyystuloksia. Toisaalta oli D. Mangeron [19]-[20] jo vuosina 1932-33 tarkastellut Dirichlet'n ongelmaa ei-hypoelliptiselle differentiaalioperaattorille $\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$. Mangeronilla ei tuolloin ollut käytettävissään Sobolev-avaruuksien teoriaa eikä distribuutioteoriaa. Hän käytti sensijaan avaruuksia, joiden elementteinä olivat funktiojonot, ilmeisesti seuraten R. Courantin elliptisessä tapauksessa esittämää menettelyä, jonka tämä myöhemmin "lopullisessa" muodossa julkaisi Courant-Hilbertin monografian toisen osan [4] luvussa 7. Dirichlet'n ongelman osalta hänen tuloksensa voi johtaa Doppel-Hochmuthin teoriasta. Toisaalta Mangeron tarkasteli myös ominaisarvotehtävää differentiaalioperaattorilleen ja vastaava tutkimus puuttuu Doppel-Hochmuthin teoriasta.

Tässä työssä tarkastelemme alueessa $R = (a, c) \times (b, d)$ lineaariseen ei-hypoelliptiseen osittaisdifferentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u(x, y) - \lambda e(x, y) u(x, y) = f(x, y)$$

ja reuna-arvoihin $u(x, y) = 0$ alueen R reunalla liittyvää Dirichlet'n reuna-arvotehtävää. Ei-hypoelliptiselle operaattorille

$$L(D) = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda e(x, y)$$

tavalliset elliptisille operaattoreille kehitetyt ratkaisumenetelmät eivät muutoksitta toimi.

Tässä työssä rajoitumme tarkastelemaan tapausta, jossa avaruuden $L^\infty(R)$ funktio e on positiivinen. Mangeronin yrittämän yleisemmän tapauksen, jossa funktio e voi saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, jätämme myöhemmin tutkittavaksi. Toisessa luvussa määrittelemme erikoisen anisotrooppisen Sobolev-avaruuden ja Poincarén epäyhtälön, jonka perusteella tiedämme, että Hilbert-avaruus $H^\Gamma(G)$ on tiheä Banach-avaruudessa $L^2(G)$. Todistamme lisäksi tässä erikoistapauksessa Meyers-Serrin lauseen, jonka mukaan funktion $u \in L^2(R)$ heikkojen L^2-derivaattojen muodostama avaruus on sama kuin sen vahvojen eli klassisten L^2-derivaattojen muodostama avaruus. Kolmannessa luvussa johdamme eräitä operaattoriteorian peruskäsitteitä ja tutustumme Fredholm-operaattoriin sekä operaattorin Friedrichs-jatkoon, jotka ovat avainasemassa tarkasteltavan ongelman ratkaisussa. Määrittelemme Fredholmin alternatiivin, jonka mukaan annettu ongelma on joko yksikäsitteisesti ratkaistavissa tai sitten ratkaisua ei ole tarkasteltavassa avaruudessa. Neljännessä luvussa sovellamme mainittuja käsitteitä ja tuloksia käytännön tilanteeseen. Näytämme, että operaattori $L(D)$ on $H_0^\Gamma(R)$-koersiivinen. Lisäksi todistamme käänteisoperaattorin L^{-1} olemassaolon ja kompaktisuuden. Viidennen luvun aiheena on ominaisarvotehtävä. Sen käsittely perustuu siihen, että operaattoreilla $L^{-1}E$ ja $E^{\frac{1}{2}} L^{-1} E^{\frac{1}{2}}$ on samat ominaisarvot.

Doppel-Hochmuthin teorian tuloksista seuraa suorakaiteen tapauksessa Dirichlet'n reuna-arvotehtävän ja ominaisarvotehtävän ratkaisuille samankaltaisia säännöllisyystuloksia kuin elliptisten differentiaalioperaattoreiden ollessa kyseessä.

Osan Mangeronin tutkimustuloksista oli ennen tätä työtä jo modernisoinut Louis Ferdinand von Wunsch-Rolshoven Freie Universität Berliinin diplomityössään "Ein Eigenwertproblem für einen nichthypoelliptischen linearen partiellen Differentialoperator vierter Ordnung mit einer positiven Gewichtsfunktion". Tässä diplomityössään hän ei kuitenkaan tutkinut reuna-arvotehtävässä ratkaisujen tai ominaisratkaisujen säännöllisyyttä eikä edes maininnut Doppel-Hochmuthin tuloksista seuraavan tälläisia säännöllisyysominaisuuksia.

Luku 2

Funktioavaruuksista

Tässä esityksessä käytämme Lebesguen mitta- ja integrointiteorian peruskäsitteitä ja -tuloksia suurinpiirtein siinä muodossa ja laajuudessa kuin H. Heuser on esittänyt oppikirjassaan [9]. Hilbert-avaruudet määrittelemme käyttäen hyväksi multi-indeksimerkintää, jonka avulla voimme valikoida vain tarvittavia osia tavallisesta Sobolev-avaruudesta, joka on määritelty kaikkien osittaisderivaattojen avulla. Itseasiassa heikkojen ja vahvojen L^2-derivaattojen avaruuksien identtisyys on vahvasti riippuvainen käytössä olevasta multi-indeksijoukosta. Luvun lopuksi esitämme Poincarén epäyhtälön, jonka perusteella saamme tuloksen Hilbert-avaruuden $H_0^\Gamma(G)$ upotukselle Banach-avaruuteen $L^2(G)$, jota tarvitsemme käänteisoperaattorin kompaktisuuden todistamisessa.

2.1 Merkintöjä, määritelmiä ja tuloksia

Erityisesti käytämme seuraavan määritelmän ja lauseen käsitteitä.

Määritelmä 2.1.1 *Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukko A Lebesguen mitallinen. Sellaisten Lebesgue-mitallisten funktioiden $f : A \to \mathbb{C}$, joille Lebesguen-integraali $\int_A |f|^2 dx$ on äärellinen, muodostamaa lineaariavaruutta merkitsemme $L^2(A)$. Tässä avaruudessa määrittelemme*

$$(f, g)_0 := \int_A \overline{f(x)} g(x) dx, \quad ||f||_0 := +\sqrt{(f, f)_0}.$$

Avaruudessa $L^2(A)$ sanomme kahden funktion f ja g olevan ekvivalentteja, $f \sim g$, jos ne yhtyvät melkein kaikkialla joukossa A. Näin saatavien ekvivalenssiluokkien

$$\{f\} := \left\{ g \in L^2(A) \mid g \sim f, f \in L^2(A) \right\}$$

muodostamaa lineaariavaruutta merkitsemme $\mathcal{L}^2(A)$. Avaruudessa $\mathcal{L}^2(A)$ määrittelemme sisätulon

$$(\{f\}, \{g\}) := \int_A \overline{f(x)} g(x) dx,$$

ja vastaavan normin

$$||\{f\}|| := + (\{f\}, \{f\})^{\frac{1}{2}}.$$

Huomautus 2.1.2 *Sisätulo* $(\cdot,\cdot)_0$ *on konjugaattilineaarinen ensimmäisen muuttujan suhteen:* $(\lambda f, g)_0 = \overline{\lambda}(f,g)_0$.

Lause 2.1.3 *Avaruus* $\mathcal{L}^2(A)$ *varustettuna sisätulolla* $(\{f\},\{g\})$ *on Hilbert-avaruus.*

Tästä lähtien samaistamme merkinnät $\{f\}$ ja f sekä $L^2(A)$ ja $\mathcal{L}^2(A)$. Kaikille funktioille f ja g avaruudesta $L^2(A)$ on voimassa Cauchy-Schwarzin epäyhtälö

$$|(f,g)_0| \leq ||f||_0 ||g||_0. \tag{2.1}$$

2.2 Hilbert-avaruudet $H^\Gamma(G)$ ja $H_0^\Gamma(G)$

Määritelmä 2.2.1 *Olkoon* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Jonoa* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) =: \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *luvuista* α_j *joukosta* $\mathbb{N}_0$ *sanomme multi-indeksiksi. Näille multi-indekseille* α *ja* β *joukosta* $\mathbb{N}_0^n$ *määrittelemme:*

1. $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$.
2. $t\alpha := (t\alpha_1, \ldots, t\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, *missä luku* $t \in \mathbb{N}_0$ *ja multi-indeksi* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
3. *Lukua* $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ *kutsumme multi-indeksin* α *pituudeksi.*
4. *Jos multi-indekseille* α *ja* β *joukosta* $\mathbb{N}_0^n$ *on voimassa* $\alpha_j \leq \beta_j$, *kaikille luvuille* j *joukosta* $\{1,\ldots,n\}$, *niin määrittelemme* $\alpha \leq \beta$.
5. $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, *missä* $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *ja* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
6. $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, *missä* $D_j := -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(i^2 = -1)$ *ja* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Tässä työssä tarkastellaan äärellisiä multi-indeksijoukkoja Γ. Näihin liitetään seuraavan määritelmän mukaiset multi-indeksijoukot.

Määritelmä 2.2.2 *Äärelliselle multi-indeksijoukolle* $\Gamma \subset \mathbb{N}_0^n$ *otetaan käyttöön seuraavat multi-indeksijoukot:*

1. $\Gamma_0 := \Gamma \cup \{(0,\ldots,0)\}$,
2. $\Gamma^* := \{\alpha \in \Gamma \mid \{\beta \in \Gamma \mid \beta \geq \alpha\} = \{\alpha\}\}$ *(joukon* Γ *maksimaalisten elementtien joukko),*
3. $2\Gamma := \{\beta \in \mathbb{N}_0^n \mid \beta = 2\alpha,$ *missä* $\alpha \in \Gamma\}$,
4. $\widetilde{\Gamma} := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid$ *on olemassa multi-indeksi* $\beta \in \Gamma$, *jolle pätee* $\alpha \leq \beta\}$ *(joukon* Γ *"täyttö").*

Edelleen määritellään

5. $\Lambda_k := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| \leq k\}$,
6. $\Lambda_k^* := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| = k\}$.

Määritelmä 2.2.3 *Olkoon $m_1 + \ldots + m_k = n$. Seuraavan merkinnän*

$$l_1 = 0, \qquad l_j = \sum_{h=1}^{j-1} m_h \quad (2 \le j \le k), \qquad \Delta_j := \sum_{h=1}^{m_j} D^2_{l_j+h}$$

avulla määrittelemme differentiaalioperaattorin

$$L(D) := \Delta_1 \ldots \Delta_k.$$

Lause 2.2.4 *Tarkastelemme erikoistapausta $k = 2$ ja $m_1 = m_2 = 1$. Silloin pätee*

$$L(D) = D_1^2 D_2^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}. \tag{2.2}$$

Differentiaalioperaattoriin (2.2) liittyy symboli $q(\xi) = \xi_1^2 \xi_2^2$, missä $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^2$. Koska pätee $\frac{\partial^2 q}{\partial \xi_1^2} = 2\xi_2^2$, on avaruuden $\mathbb{R}^2$ jonolle $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, jolle pätee $\xi^{(n)} = (\frac{1}{n}, n)$, voimassa

$$\lim_{n\to\infty} |\xi^{(n)}| = \infty \ \textit{ja} \ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial^2 q}{\partial \xi_1^2}(\xi^{(n)})}{q(\xi^{(n)})} = \infty.$$

Täten on differentiaalioperaattori $L(D)$ L. Hörmanderin [14] mukaan ei-hypoelliptinen.

Olkoon G avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin osajoukko ja $C^\Gamma(G)$ kaikkien joukossa G jatkuvien funktioiden[1] f, joiden derivaatat $D^\alpha f$ kaikille multi-indekseille α joukosta $\widetilde{\Gamma}$ ovat jatkuvia, muodostama lineaariavaruus. Olkoon $C^k(G)$ kaikkien joukossa G jatkuvien funktioiden f, joiden derivaatat $D^\alpha f$ kaikille multi-indekseille α joukosta Λ_k ovat jatkuvia, muodostama lineaariavaruus.

Jatkuvan funktion kantaja on

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in G \mid u(x) \neq 0\}}.$$

Avaruuden $C^\Gamma(G)$ funktioiden, joiden kantaja on kompakti ja sisältyy joukkoon G, muodostamaa lineaariavaruutta merkitään $C_0^\Gamma(G)$. Avaruuden $C^k(G)$ funktioiden, joiden kantaja on kompakti ja sisältyy joukkoon G, muodostamaa lineaariavaruutta merkitään $C_0^k(G)$. Merkitään myös

$$C_0^\infty(G) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C_0^k(G).$$

Lisäksi määritellään avaruus

$$C_*^\Gamma(G) := \left\{ u \,\middle|\, u \in C^\Gamma(G), D^\alpha u \in L^2(G), \text{ jokaisella } \alpha \in \widetilde{\Gamma} \right\}.$$

Avaruudessa $C_*^\Gamma(G)$ määritellemme sisätulon

$$(u, v)_\Gamma := \sum_{\alpha\in\widetilde{\Gamma}} \int_G \overline{D^\alpha u(x)} D^\alpha v(x) dx,$$

[1]Tässä työssä esiintyvät funktiot käsitämme kompleksiarvoisiksi, jollei erityisesti toisin mainita.

jonka avulla voimme määritellä normin $||u||_\Gamma$:

$$||u||_\Gamma^2 := (u,u)_\Gamma = \sum_{\alpha\in\widetilde{\Gamma}} ||D^\alpha u||_0^2.$$

Täydellistämällä avaruus $C_*^\Gamma(G)$ sisätulon $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ suhteen saadaan Hilbert-avaruus $H^\Gamma(G)$ (avaruuden $C_*^\Gamma(G)$ Cauchy-jonojen ekvivalenssiluokkien joukkona). Tässä avaruudessa on sisätulona

$$(u,v)_\Gamma^* := \lim_{j\to\infty} (v_j,u_j)_\Gamma,$$

missä Cauchy-jonot (u_j) ja (v_j) ovat jotkin avaruuden $H^\Gamma(G)$ elementtien u ja v edustajat avaruudessa $C_*^\Gamma(G)$. Sisätulo on riippumaton edustajien valinnasta.

Määritelmä 2.2.5 *Olkoon avaruuden $L^2(G)$ funktiolla u jono (u_k) avaruudessa $C_*^\Gamma(G)$, jolla on seuraavat ominaisuudet*

1. $\lim_{k\to\infty} ||u-u_k||_0 = 0$,
2. $\lim_{k,l\to\infty} ||D^\alpha u_k - D^\alpha u_l||_0 = 0$, *kun* $\alpha\in\widetilde{\Gamma}$.

Tällöin Cauchy-jonolla $(D^\alpha u_k)$ on Hilbert-avaruudessa $L^2(G)$ rajaelementti w_α, jota kutsutaan funktion u vahvaksi L^2-derivaataksi kertalukua α.

Lause 2.2.6 *Jokaiselle avaruuden $H^\Gamma(G)$ funktiolle u on olemassa jono (u_k) avaruudessa $C_*^\Gamma(G)$, jolle määritelmän 2.2.5 ehdot ovat voimassa kaikille $\alpha\in\widetilde{\Gamma}$.*

Todistus Funktiolle u avaruudesta $H^\Gamma(G)$ voidaan valita jono (u_k) avaruudesta $C_*^\Gamma(G)$, jolle on avaruudessa $L^2(G)$ voimassa $u_k\to u$ ja

$$\lim_{k,l\to\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\Gamma}} ||D^\alpha u_k - D^\alpha u_l||_0^2 = 0.$$

Siten jono $(D^\alpha u_k)$ on kaikille multi-indekseille α joukosta $\widetilde{\Gamma}$ Cauchy-jono. □

Määritelmä 2.2.7 *Olkoon avaruuden $L^2(G)$ funktiolle u olemassa multi-indeksiin α joukosta $\mathbb{N}_0^n$ liittyvä funktio v_α avaruudesta $L^2(G)$, jolle on kaikille avaruuden $C_0^\infty(G)$ funktioille ψ voimassa*

$$(u, D^\alpha\psi)_0 = (v_\alpha,\psi)_0.$$

Funktiota v_α kutsutaan funktion u heikoksi L^2-derivaataksi kertalukua α.

Määritelmä 2.2.8 *Määritellään heikkojen L^2-derivaattojen avulla avaruus*

$$W^\Gamma(G) := \{u\in L^2(G)\mid v_\alpha\in L^2(G) \text{ kaikille multi-indekseille } \alpha\in\widetilde{\Gamma}\}.$$

Näytämme seuraavaksi, että funktion u vahva L^2-derivaatta on myös heikko L^2-derivaatta.

Lause 2.2.9 *Jos funktiolla u avaruudesta $L^2(G)$ on kaikille multi-indekseille α joukosta $\widetilde{\Gamma}$ vahvat L^2-derivaatat, joilla on määritelmän 2.2.5 ominaisuudet (1) ja (2), niin nämä ovat saman funktion u heikkoja L^2-derivaattoja.*

Todistus Oletuksista seuraa, että funktiolle u on olemassa jono (u_k) avaruudessa $C_*^{\widetilde{\Gamma}}(G)$, jolla on määritelmän 2.2.5 ominaisuudet (1) ja (2) kaikille $\alpha \in \widetilde{\Gamma}$. Olkoon multi-indeksille α joukosta $\widetilde{\Gamma}$ avaruuden $L^2(G)$ funktio v_α jonon $(D^\alpha u_k)$ rajaelementti. Funktioille u_k avaruudesta $C_*^{\widetilde{\Gamma}}(G)$ ja ψ avaruudesta $C_0^\infty(G)$ saamme osittaisintegroinnilla

$$(u_k, D^\alpha \psi)_0 = (D^\alpha u_k, \psi)_0 .$$

Rajankäynnillä $k \to \infty$ saamme

$$(u, D^\alpha \psi)_0 = (v_\alpha, \psi)_0 ,$$

joten v_α on funktion u heikko L^2-derivaatta. □

Lause 2.2.10 *On voimassa $H^\Gamma(G) = W^\Gamma(G)$.*

Todistus Lauseen 2.2.9 perusteella avaruus $H^\Gamma(G)$ sisältyy avaruuteen $W^\Gamma(G)$. On siis osoitettava, että avaruus $W^\Gamma(G)$ sisältyy avaruuteen $H^\Gamma(G)$. Avaruuden $H^\Gamma(G)$ määritelmän perusteella on riittävää osoittaa, että avaruus $C_*^\Gamma(G)$ on tiheä avaruudessa $W^\Gamma(G)$. Tämän todistamiseksi tarvitsemme Fridrichsin silotusta (vertaa Adams [1] lause 2.17 sivulla 29). Otetaan käyttöön merkinnät $\mathbb{C}_1^n := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x| < 1\}$ ja $\mathbb{C}_\varepsilon^n := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x| < \varepsilon\}$. Olkoon J positiivinen reaaliarvoinen kuvaus avaruudessa $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, jolle on voimassa

$$J(x) = 0, \text{ kun } |x| \geq 1 \text{ ja } \int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1.$$

Esimerkki funktiosta, joka toteuttaa edellä esitetyt ehdot, on

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \kappa \exp[-\frac{1}{1-|x|^2}] & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases},\ \text{ missä } \kappa := \left(\int_{\mathbb{C}_1^n} \exp[-\frac{1}{1-|x|^2}]dx \right)^{-1}$$

Määritellään jokaiselle positiiviselle reaaliluvulle ε avaruudessa $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uusi funktio

$$J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Nyt on kaikille $|x| \geq \varepsilon$ voimassa $J_\varepsilon(x) = 0$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Funktiota J_ε kutsutaan silotusfunktioksi ja konvoluutiota

$$(J_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)u(y)dy \tag{2.3}$$

sellaisen funktion u kanssa, jolle yhtälön (2.3) oikea puoli on määritelty, kutsutaan funktion u silotukseksi. Kun merkitsemme $\widetilde{u}$ sellaisia funktioita avaruudesta $L^2(G)$, jotka on jatkettu koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$

$$\widetilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{kun } x \text{ kuuluu joukkoon } G \\ 0, & \text{kun } x \text{ kuuluu joukkoon } \mathbb{R}^n \setminus G \end{cases},$$

on konvoluutio määritelty yhtälön

$$(J_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\widetilde{u}(y)dy$$

avulla. Seuraavassa lemmassa esitellään muutamia jatkossa tarvittavia Friedrichsin silotuksen ominaisuuksia.

Lemma 2.2.11 *Avaruuden $W^\Gamma(G)$ funktiolle u on voimassa*

1. *Olkoon K sellainen joukon G kompakti osajoukko, jonka ulkopuolella funktio u häviää. Tällöin on positiiviselle reaaliluvulle*

$$\varepsilon < \inf\{\, |x-y| \mid x \in K,\ y \in \partial G\}$$

voimassa, että konvoluutio $J_\varepsilon * u$ kuuluu avaruuteen $C_0^\infty(G)$.

2. *Olkoon G' sellainen joukon G rajoitettu avoin osajoukko, jonka sulkeuma $\overline{G'}$ sisältyy joukkoon G. Tällöin pätee edellisen kohdan ehdon täyttävälle luvulle ε, että konvoluutio $J_\varepsilon * u$ kuuluu avaruuteen $W^\Gamma(G')$ ja*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||J_\varepsilon * u - u||_{\Gamma, G'} = 0.$$

Lemman 2.2.11 todistus Kohdan 1. todistus seuraa lähteen [1] sivulla 29 olevan lemman 2.18 b-kohdasta. Toisen kohdan todistamiseksi olkoon luku ε kuten lemman 2.2.11 kohdassa 1. Tällöin on Fubinin lauseen nojalla ja osittaisintegroinnilla kaikille avaruuden $C_0^\infty(G')$ funktioille ϕ ja kaikille multi-indekseille α joukosta $\widetilde{\Gamma}$ voimassa

$$\begin{aligned}
\int_{G'} (J_\varepsilon * u)(x) D^\alpha \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\widetilde{u}(y)dy \right] D^\alpha \widetilde{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y)\widetilde{u}(x-y)D^\alpha\widetilde{\phi}(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{C}^n_\varepsilon} J_\varepsilon(y) \left[\int_{G'} u(x-y) D^\alpha \phi(x) dx \right] dy = \int_{\mathbb{C}^n_\varepsilon} J_\varepsilon(y) \left[\int_{G'} \partial^\alpha u(x-y)\phi(x)dx \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y)(\widetilde{\partial^\alpha u})(x-y)\widetilde{\phi}(x)dxdy = \int_{G'} \left[\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)(\widetilde{\partial^\alpha u})(y) \right] \phi(x)dxdy \\
&= \int_{G'} (J_\varepsilon * \partial^\alpha u)(x)\phi(x)dx,
\end{aligned}$$

eli olemme todistaneet konvoluution derivointikaavan

$$\partial^\alpha (J_\varepsilon * u) = J_\varepsilon * \partial^\alpha u. \tag{2.4}$$

Kaikille multi-indekseille α joukosta $\widetilde{\Gamma}$ on lähteen [1] sivulla 29 olevan lemman 2.18 c-kohdan ja funktion u ominaisuuksien perusteella voimassa, että konvoluutio $J_\varepsilon * \partial^\alpha u$ kuuluu avaruuteen $L^2(G')$ ja siten kaavasta (2.4) seuraa, että konvoluutio $J_\varepsilon * u$ kuuluu avaruuteen $W^\Gamma(G')$. Lisäksi seuraa kaavasta (2.4) ja jo kerran käytetystä lähteen [1] lemman 2.18 c-kohdasta kaikille multi-indekseille α joukosta $\widetilde{\Gamma}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||\partial^\alpha (J_\varepsilon * u) - \partial^\alpha u||_{0,G'} = \lim_{\varepsilon \to 0} ||J_\varepsilon * \partial^\alpha u - \partial^\alpha u||_{0,G'} = 0,$$

eli

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||J_\varepsilon * u - u||_{\widetilde{\Gamma}, G'} = 0. \ \square$$

Palataan lauseen 2.2.10 todistukseen. Määritellään jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle k joukko

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega \,|\, |x| < k, \ \inf\{|x-y| \ | \ y \in \partial\Omega\} > \frac{1}{k} \right\}$$

ja $\Omega_0 := \Omega_{-1} := \emptyset$. Joukon Ω avoimien osajoukkojen joukko

$$\mathcal{O} := \left\{ U_k \middle| U_k := \Omega_{k+1} \bigcap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_{k-1}} \right), \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

on joukon Ω peitto. Olkoon Ψ joukkoon $\mathcal{O}$ kuuluva joukon Ω ykkösen hajotelma. Lähteessä [1] on sivulla 51 lauseessa 3.14 määritelty ykkösen hajotelma. Olkoon avaruuden $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ funktio ψ_k äärellinen summa funktioita ψ joukosta Ψ, joiden kantaja sisältyy joukoon U_k. Kaikille joukon Ω elementeille x pätee, että funktio ψ_k kuuluu avaruuteen $C_0^\infty(U_k)$ ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1.$$

Leibnizin tulokaava heikoille L^2-derivaatoille ja multi-indekseille α joukosta Γ on

$$\partial^\alpha (\psi_k u) = \sum_{\beta \in \widetilde{\Gamma}, \, \beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta u \partial^{\alpha - \beta} \psi_k.$$

Tästä seuraa multi-indekseille α joukosta Γ, funktioille u avaruudesta $W^\Gamma(\Omega)$ ja funktioille ψ_k avaruudesta $C_0^\infty(U_k)$, että tulo $\psi_k u$ on avaruudessa $W^\Gamma(\Omega)$. Koska tulo $\psi_k u$ häviää funktion ψ_k kantajan ulkopuolella ja saa joukkoon Ω sisältyvässä rajoitetussa avoimessa joukossa

$$V_k := \Omega_{k+2} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{k-2})$$

arvon

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \leq \inf\{|x-y|\},$$

missä x kuuluu joukkoon supp ψ_k ja y joukkoon ∂V_k, seuraa lemman 2.2.11 nojalla positiiviselle reaaliluvulle

$$\varepsilon < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2},$$

että

$$\operatorname{supp}\,(J_\varepsilon * (\psi_k u)) \subset V_k.$$

Lisäksi on olemassa positiivinen reaaliluku

$$\varepsilon_k < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2},$$

jolle pätee

$$||J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u||_{\Gamma,\Omega} = ||J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u||_{\Gamma, V_k} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Olkoon voimassa

$$\phi := \sum_{k=1}^{\infty} J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) .$$

Jokaisessa joukkoon Ω kuuluvassa kompaktissa joukossa Ω' säilyy vain äärellinen määrä yhteenlaskettavia, joten funktio ϕ asuu avaruudessa $C^{\infty}(\Omega)$. Joukon Ω_k elementille x on voimassa

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(x)u(x) \text{ ja } \phi(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \left[J_{\varepsilon_j} * (\psi_j u)\right](x),$$

joten pätee

$$||u - \phi||_{\Gamma,\Omega_k} \leq \sum_{j=1}^{k+2} || \left[J_{\varepsilon_j} * (\psi_j u)\right] - \psi_j u||_{\Gamma,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.5}$$

mistä seuraa kolmioepäyhtälön nojalla

$$||\phi||_{\Gamma,\Omega_k} \leq ||u - \phi||_{\Gamma,\Omega_k} + ||u||_{\Gamma,\Omega_k} < \frac{\varepsilon}{2} + ||u||_{\Gamma,\Omega}.$$

Monotonisen konvergenssilauseen nojalla on voimassa

$$\lim_{k\to\infty} ||\phi||_{\Gamma,\Omega_k} = ||\phi||_{\Gamma,\Omega},$$

joten funktio ϕ asuu avaruudessa $H^{\Gamma}(\Omega)$ ja siten avaruuden $H^{\Gamma}(\Omega)$ määritelmän mukaan avaruudessa $C^{\infty}_{*}(\Omega)$. $\square$

Lause 2.2.12 *Jokainen heikko L^2-derivaatta on yksikäsitteisesti määrätty.*

Todistus Olkoon funktiolla u avaruudessa $L^2(G)$ kaksi samaa kertalukua α olevaa heikkoa L^2-derivaattaa v_α ja v^*_α. Tällöin on kaikille funktioille ψ avaruudesta $C^{\infty}_0(G)$ voimassa

$$(v_\alpha - v^*_\alpha, \psi)_0 = 0. \quad \square$$

Koska vahva L^2-derivaatta on heikko L^2-derivaatta, ja heikko L^2-derivaatta on määritelty yksikäsitteisesti, on myös vahva L^2-derivaatta määrätty yksikäsitteisesti. Nyt on osoitettavissa, että sisätulolla $(u, v)^*_\Gamma$ on myös lauseke

$$(u, v)^*_\Gamma = \sum_{\alpha\in\widetilde{\Gamma}} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0 =: (u, v)_\Gamma,$$

missä derivaatat ovat L^2-mielessä vahvoja. Avaruuden $C^{\infty}_0(G)$ sulkeumaa avaruudessa $H^{\Gamma}(G)$ varustettuna sisätulolla $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ merkitään $H^{\Gamma}_0(G)$ ja multi-indeksijoukkoon Λ_k liittyviä avaruuksia

$$H^k(G) := H^{\Lambda_k}(G) \text{ ja } H^k_0(G) := H^{\Lambda_k}_0(G).$$

Avaruuteen $H^k_0(G)$ voidaan määritellä sisätulo

$$(u, v)_{\Lambda^*_k,G} = \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0.$$

Jos kahdelle eri multi-indeksijoukolle Γ_1 ja Γ_2 on voimassa $\Gamma_1^*=\Gamma_2^*$, niin pätee

$$H_0^{\Gamma_1}(G)=H_0^{\Gamma_2}(G) \text{ ja } H^{\Gamma_1}(G)=H^{\Gamma_2}(G).$$

Erityisesti on voimassa

$$H_0^{\Gamma}(G) = H_0^{\Gamma^*}(G) \text{ ja } H^{\Gamma}(G) = H^{\Gamma^*}(G).$$

Lause 2.2.13 (Poincarén epäyhtälö) *Olkoon G avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin osajoukko, jolle on yhdelle indeksille j välillä $[1,n]$ voimassa*

$$G \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \in (a,b)\}.$$

Tällöin on kaikille avaruuden $C_0^\infty(G)$ funktioille u voimassa

$$||u||_0 \leq \frac{d}{\pi}||D_j u||_0,$$

missä $d := b - a$.

Todistus Katso lähteestä [2] lause 4.10 sivulla 122.

Käytämme edellä saatuja tuloksia apuna tarkasteltaessa Hilbert-avaruuden $H_0^\Gamma(G)$ upotusta avaruuteen $L^2(G)$. Olkoon kaikille indekseille j suljetulta väliltä $[1,n]$ voimassa ylhäältä rajoittava ehto

$$d_j(G) := \sup\{|s-t| \mid s,t \in \mathrm{pr}_j(G)\},$$

missä $\mathrm{pr}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on projektiokuvaus j :n koordinaattiakselin suuntaan, ja merkitään

$$d_\Gamma(G) := \min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma} \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{d_j(G)}{\pi}\right]^{\alpha_j}.$$

Koska lauseessa 2.2.13 vakio d on itseasiassa joukon G yksiuloitteisen projektion mitta, seuraa lauseesta 2.2.13 jokaiselle multi-indeksille α joukosta Γ ja funktiolle ψ avaruudesta $C_0^\infty(G)$

$$||\psi||_{0,G} \leq \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{d_j(G)}{\pi}\right]^{\alpha_j} \left(\sum_{\beta\in\Gamma} ||D^\beta\psi||_{0,G}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Huomautus 2.2.14 *Kaikille funktioille ψ avaruudesta $C_0^\infty(G)$ on voimassa epäyhtälö*

$$||\psi||_{0,G} \leq d_\Gamma(G) \left(\sum_{\beta\in\Gamma} ||D^\beta\psi||_{0,G}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

Erikoisesti, kun luku $d_\Gamma(G)$ on äärellinen, ovat sisätulot

$$(\cdot,\cdot)_{\Gamma,G} \quad \textit{ja} \quad \sum_{\beta\in\widetilde{\Gamma}} (D^\beta\cdot, D^\beta\cdot)_{0,G}$$

ekvivalentit.

Seuraus 2.2.15 *Kun $d_\Gamma(G)$ on äärellinen, on Hilbert-avaruus $\left(H_0^\Gamma(G), (\cdot,\cdot)_{\Gamma,G}\right)$ upotettu jatkuvasti ja tiheästi avaruuteen $L^2(G)$ ja upotuksen $E : H_0^\Gamma(G) \to L^2(G)$ operaattorinormille pätee*

$$||E|| \leq d_\Gamma(G).$$

Todistus Väite seuraa suoraan epäyhtälöstä (2.6). $\square$

Luku 3

Operaattoriteoriaa

Tässä luvussa määritellään aluksi lineaarioperaattori ja suljettu operaattori. Itseasiassa jokainen rajoitettu lineaarioperaattori on suljettu. Adjungoidun operaattorin kohdalla tulee vastaan ensimmäinen funktionaalianalyysin lause, Fréchet-Rieszin esityslause, jonka perustella adjungoidun operaattorin T^* määrittelyjoukon elementit on yksikäsitteisesti määrätty operaattorin T avulla. Tämän jälkeen tulee ajankohtaiseksi määritellä kompakti operaattori. Sen jälkeen tutkimme kuinka operaattoritulon kompaktisuus määritellään. Tämän luvun toisessa osassa määrittelemme jatkossa erittäin tärkeän koersiivisyyden Gårdingin epäyhtälön avulla. Tämän jälkeen määrittelemme hieman tarvittavia kohtia ominaisarvoja käsittelevästä teoriasta. Jatkon kannalta tärkeä tulos liittyy itseadjungoidun operaattorin spektriin. Kolmannessa osassa todistamme Fredholmin alternatiivin Lax-Milgramin lauseen ja Riesz-Fischerin lauseen avulla. Samalla huomaamme, että V-koersiivinen operaattori voidaan lausua kompaktin operaattorin ja rajoitetun rajoitetusti kääntyvän operaattorin summana.

3.1 Määritelmiä

Olkoot X ja Y kompleksisia Hilbert-avaruuksia[2]. Tutkimme lineaarikuvauksia $T : D(T) \to Y$, joita kutsumme lineaarioperaattoreiksi, missä operaattori T on määritelty avaruuden X aliavaruudessa $D(T)$. Jatkossa samaistamme merkinnät Tx ja $T(x)$ ellei ole sekaantumisen vaaraa.

Lause 3.1.1 *Olkoon $T : D(T) \to Y$ on lineaarinen ja piste x_0 joukosta $D(T)$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1. *Operaattori T on jatkuva.*
2. *Operaattori T on jatkuva pisteessä x_0.*
3. *Operaattorinormille on voimassa* $\sup\{||Tx||_Y \mid x \in D(T),\ ||x||_X \leq 1\} < \infty$.
4. *On olemassa vakio K, jolle on kaikille operaattorin T määrittelyjoukon $D(T)$ pisteille x voimassa $||Tx||_Y \leq K||x||_X$.*

[2] Tässä työssä käytämme yleensä kompleksisia Hilbert-avaruuksia, joille varaamme merkinnät H, V, X, Y ja Z.

Todistus Katso lähteestä [2] lemma 3.1 sivulla 101.

Jatkuvien lineaarioperaattoreiden joukko on $L(X, Y)$, missä kuvaus T avaruudesta X avaruuteen Y on jatkuva ja lineaarinen. Lauseen 3.1.1 kolmannen kohdan mukaan on lineaarioperaattorin T operaattorinormi

$$||T||_{L(X,Y)} := \sup\{||Tx||_Y \mid x \in X, \ \ ||x||_X \leq 1\}$$

äärellinen. Jatkossa samaistamme merkinnät $||T||$ ja $||T||_{L(X,Y)}$ ellei ole sekaannuksen vaaraa. Lauseen 3.1.1 todistuksen perusteella on $||T||$ pienin luku, joka toteuttaa ehdon

$$||Tx||_Y \leq ||T|| \, ||x||_X.$$

Tästä epäyhtälöstä seuraa välittömästi kolmioepäyhtälön perusteella

$$||(T_1 + T_2)x||_Y \leq ||T_1x||_Y + ||T_2x||_Y \leq (||T_1|| + ||T_2||) \, ||x||_X,$$

eli operaattorisumma $T_1 + T_2$ kuuluu joukkoon $L(X, Y)$, joten epäyhtälö

$$||T_1 + T_2|| \leq ||T_1|| + ||T_2||$$

on tosi.

Lause 3.1.2 *Avaruus $L(X, Y)$ varustettuna normilla $|| \cdot ||_{L(X,Y)}$ on Banach-avaruus. Olkoot operaattorit T avaruudesta $L(X, Y)$ ja S avaruudesta $L(Y, Z)$. Tällöin operaattoritulo ST kuuluu avaruuteen $L(X, Z)$ ja*

$$||ST||_{L(X,Z)} \leq ||S||_{L(Y,Z)}||T||_{L(X,Y)}.$$

Todistus Katso lähteestä [2] lause 3.3 sivulla 102.

Määritelmä 3.1.3 *Operaattori T on tiheästi määritelty, jos sen määrittelyjoukko $D(T)$ on tiheä avaruudessa Y eli jokaista määrittelyjoukon $D(T)$ pistettä x ja jokaista positiivistä lukua ε kohti on olemassa sellainen määrittelyjoukon $D(T)$ piste y, jolle on voimassa*

$$||y - x|| < \varepsilon.$$

Määritelmä 3.1.4 *Tiheästi määritelty lineaarioperaattori $T : D(T) \to X$, missä joukko $D(T)$ sisältyy avaruuteen X, on symmetrinen, jos kaikille elementeille u ja v joukosta $D(T)$ on voimassa*

$$(Tu, v)_X = (u, Tv)_X.$$

Määritelmä 3.1.5 *Operaattori $T : D(T) \to Y$ on suljettu, jos ehdoista*

1. $\lim_{j\to\infty} ||x_j - x||_X \to 0,$
2. $\lim_{j\to\infty} ||Tx_j - y||_Y \to 0,$

missä jono (x_j) sisältyy operaattorin T määrittelyjoukkoon, elementti x on avaruudessa X ja elementti y avaruudessa Y, seuraa, että elementti x kuuluu operaattorin T määrittelyjoukkoon ja $Tx = y$.

Seuraus 3.1.6 *Jokainen rajoitettu lineaarinen operaattori on suljettu.*

Määritelmä 3.1.7 *Operaattoria T' kutsutaan operaattorin T jatkoksi, jos seuraavat ehdot pitävät paikkansa*

1. $D(T) \subset D(T')$,

2. $T'x = Tx$,

kaikille elementeille x operaattorin T määrittelyjoukosta $D(T)$. Tällöin on T operaattorin T' kutistus joukkoon $D(T)$.

Määritelmä 3.1.8 *Operaattoreiden väliset operaatiot määritellään seuraavasti.*

$T_1 + T_2$: *Summaoperaattorin määrittelyjoukko on $D(T_1 + T_2) := D(T_1) \cap D(T_2)$ ja $(T_1 + T_2)x := T_1x + T_2x$, kun elementti x kuuluu joukkoon $D(T_1 + T_2)$.*

γT : *Määrittelyjoukko on $D(\gamma T) := D(T)$ ja $(\gamma T)x := \gamma(Tx)$, kun elementti x kuuluu joukkoon $D(\gamma T)$, missä $\gamma \neq 0$ on kompleksiluku.*

T_1T_2 : *Operaattoritulolle on voimassa $(T_1T_2)x := T_1(T_2x)$, kun elementti x kuuluu operaattorin T_2 ja T_2x operaattorin T_1 määrittelyjoukkoon.*

T^{-1} : *Jos kaikille $x, y \in D(T)$ vain arvoille $x = y$ on voimassa $Tx = Ty$ eli T injektio, määrittelemme $D(T^{-1}) := R(T)$, missä $R(T)$ on operaattorin T arvojoukko, ja $T^{-1}(Tx) := x$, kun elementti x kuuluu operaattorin T määrittelyjoukkoon $D(T)$.*

Koska operaattorit T, T_1 ja T_2 ovat lineaarisia, niin myös yllä määritellyt uudet operaattorit ovat lineaarisia. Käänteisoperaattorin T^{-1} olemassaoloon lineaariselle operaattorille T riittää osoittaa, että pätee $Tx = 0$ silloin ja vain silloin kun $x = 0$.

Määritelmä 3.1.9 *Olkoon $T : X \to Y$ tiheästi määritelty operaattori. Operaattorin T adjungoitua operaattoria merkitään T^*. Määrittelyjoukko $D(T^*)$ koostuu niistä avaruuden Y elementeistä x, joille on olemassa sellainen elementti x^* avaruudessa Y, että kaikille elementeille y operaattorin T määrittelyjoukosta $D(T)$ pätee*

$$(x, Ty) = (x^*, y). \tag{3.1}$$

Elementti x^* on yksikäsitteisesti määrätty ja kirjoitamme $T^*x := x^*$.

Lause 3.1.10 (Fréchet-Rieszin esityslause) *Olkoon $(X, (\cdot, \cdot))$ Hilbert-avaruus. Jokaiselle jatkuvalle lineaariselle funktionaalille $L : X \to \mathbb{C}$ on olemassa tasan yksi sellainen elementti y^* avaruudessa X, että kaikille elementeille x avaruudesta X on voimassa*

$$Lx := (y^*, x). \tag{3.2}$$

Todistus Joukko $M := \{x \in X |\ Lx = 0\}$ on avaruuden X suljettu lineaarialiavaruus. Väite on voimassa arvolla $y^* = 0$, jos avaruudet M ja X ovat samat. Olkoon siis avaruus M avaruuden X aito osajoukko. Tällöin on olemassa sellainen elementti $y \neq 0$ avaruudesta X, joka on ortogonaalinen avaruuden M kanssa. Olkoon voimassa

$$y^* = \frac{\overline{Ly}}{||y||^2} y.$$

Tällöin yhtälö (3.2) on voimassa muodossa $0 = 0$, jos elementti x on avaruudesta M. Olkoon x mielivaltainen elementti avaruudesta X. Valinnalla $Ly \neq 0$ ja $\gamma := \frac{Lx}{Ly}$ kuuluu elementti $x_1 = x - \gamma y$ avaruuteen M, eli

$$Lx = L(x_1 + \gamma y) = Lx_1 + \gamma Ly = (y^*, x_1) + \gamma(y^*, y) = (y^*, x_1 + \gamma y) = (y^*, x).$$

Olkoon y_1^* ja y_2^* ylläolevan kaavan toteuttavaa elementtiä. Tällöin on voimassa

$$Lx = (y_1^*, x) = (y_2^*, x).$$

Nyt on kaikille elementeille x avaruudesta X voimassa $0 = (y_1^* - y_2^*, x)$. Voimme valita $x = y_1^* - y_x^*$, joten pätee

$$0 = ||y_1^* - y_2^*||^2$$

eli $y_1^* = y_2^*$. □

Selvästi operaattori T^* on aina lineaarinen ja sisätulon jatkuvuuden nojalla suljettu. Erikoisesti, jos T on rajoitettu lineaarioperaattori, seuraa Fréchet-Rieszin esityslauseesta 3.1.10, että operaattorin T^* määrittelyjoukkona $D(T^*)$ on avaruus X ja operaattori T^* rajoitettu. Itseasiassa normit $||T^*||$ ja $||T||$ ovat yhtäsuuret.

Lause 3.1.11 *Adjungoitujen operaattoreiden laskusäännöt ovat:*

1. *Jos kaikille elementeille x avaruudesta Y pätee $Ox := 0$, on O nollaoperaattori ja $O^* = O$.*
2. *Jos kaikille elementeille x avaruudesta Y pätee $Ix = x$, on I identtinen operaattori ja $I^* = I$.*
3. *Kaikille kompleksiluvuille γ on voimassa $(\gamma I)^* = \overline{\gamma} I$.*
4. $(T_1 + T_2)^* \supset T_1^* + T_2^*$
5. $(T_1 T_2)^* \supset T_2^* T_1^*$

Ehdosta $T_1 \subset T_2$ seuraa, että $T_1^* \supset T_2^*$.

Todistus Kohdat 1, 2 ja 3 ovat selviä. Olkoon $f \in D(T_1^* + T_2^*) = D(T_1^*) \cap D(T_2^*)$. Tällöin on kaikille elementeille $g \in D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$ adjungoidun operaattorin määritelmän mukaan voimassa

$$((T_1^* + T_2^*)f, g) = (T_1^* f, g) + (T_2^* f, g) = (f, T_1 g) + (f, T_2 g) = (f, (T_1 + T_2)g)\,,$$

joten pätee $f \in D\left((T_1 + T_2)^*\right)$ ja $(T_1 + T_2)^* f = T_1^* f + T_2^* f$. Viidennen kohdan todistamiseksi olkoon $f \in D(T_2^* T_1^*)$ ja $g \in D(T_1 T_2)$. Tällöin on voimassa $f \in D(T_1^*)$, $T_1^* f \in D(T_2^*)$, $g \in D(T_2)$ ja $T_2 g \in D(T_1)$. Nyt seuraa adjungoidun operaattorin määritelmästä

$$(T_2^* T_1^* f, g) = (T_1^* f, T_2 g) = (f, T_1 T_2 g). \ \square$$

Seuraavien lauseiden todistuksessa tarvitsemme avaruuden X karteesista toista potenssia $X \times X = X^2$. Avaruuden X^2 elementtejä ovat avaruuden X pisteiden järjestetyt parit $\{x_1, x_2\}$. Avaruudessa X^2 määrittelemme sisätulon

$$(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}) := (x_1, y_1) + (x_2, y_2),$$

joten X^2 on Hilbert-avaruus.

Määritelmä 3.1.12 *Olkoon T operaattori Hilbert-avaruudessa X. Joukko*

$$G(T) := \{\{x, Tx\} \mid x \in D(T)\}$$

on operaattorin T graafi.

Joukko $G(T)$ on silloin ja vain silloin avaruuden X^2 lineaarialiavaruus, kun operaattori T on lineaarinen. Joukko $G(T)$ on silloin ja vain silloin suljettu, kun operaattori T on suljettu. Relaatiot $G(T) \subset G(T')$ ja $T \subset T'$ ovat yhtäpitäviä. Määritellään avaruudessa X^2 kaksi rajoitettua lineaarioperaattoria $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{V}$

$$\mathcal{U}\{x_1, x_2\} := \{x_2, x_1\}, \quad \mathcal{V}\{x_1, x_2\} := \{x_2, -x_1\}.$$

Näille operaattoreille on voimassa $\mathcal{U}\mathcal{V} = -\mathcal{V}\mathcal{U}$ ja $\mathcal{U}^2 = -\mathcal{V}^2 = I$, missä I on avaruudessa X^2 määritelty identtinen operaattori

$$I\{x_1, x_2\} := \{x_1, x_2\}.$$

Ehto (3.1) adjungoidun operaattorin määrittelyjoukolle voidaan nyt kirjoittaa kaikille $y \in D(T)$

$$(\{x, x^*\}, \mathcal{V}\{y, Ty\}) = 0. \tag{3.3}$$

Ehto (3.3) kertoo, että joukon $G(T^*)$ elementeinä $\{x, x^*\}$ ovat ne avaruuden X^2 elementit, jotka ovat elementtien $\mathcal{V}\{y, Ty\}$, missä y kuuluu joukkoon $D(T)$, ortogonaalielementtejä. Täten on voimassa

$$G(T^*) = X^2 \ominus \mathcal{V}[G(T)], \tag{3.4}$$

missä $\ominus$ tarkoittaa ortogonaalin komplementin ja [ ] sulkeuman muodostusta.[3]

Lause 3.1.13 *Olkoon T operaattori Hilbert-avaruudessa X. Jos operaattorit T^{-1}, T^* ja $(T^{-1})^*$ ovat olemassa, on myös operaattori $(T^*)^{-1}$ olemassa ja sille pätee $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

[3] Yleisesti: $X \ominus M \equiv M^\perp = \{x \in X | (x, y) = 0$ kaikille $y \in M$. Jos M on suljettu aliavaruus, pätee $M^{\perp\perp} = M$.

Todistus Selvästi on voimassa $G(T^{-1}) = \mathcal{U}G(T)$ ja ehdon (3.4) nojalla

$$\begin{aligned} G\left((T^{-1})^*\right) &= X^2 \ominus \mathcal{V}[G(T^{-1})] = X^2 \ominus \mathcal{V}\mathcal{U}[G(T)] = \mathcal{U}\left(\mathcal{U}X^2 \ominus \mathcal{V}[G(T)]\right) \\ &= \mathcal{U}\left(X^2 \ominus \mathcal{V}[G(T)]\right) = \mathcal{U}G(T^*) = G\left((T^*)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Edellä käytimme tietoa, että operaattori $\mathcal{U}$ on unitaarinen Hilbert-avaruudessa X^2, eli kaikille $(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\})$ pätee $(U\{x_1, x_2\}, U\{y_1, y_2\}) = (\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\})$. □

Lause 3.1.14 *Olkoon T tiheästi määritelty Hilbert-avaruuden X suljettu lineaarioperaattori. Tällöin operaattori T^* on määritelty tiheästi ja $T^{**} := (T^*)^* = T$.*

Todistus Teemme vastaoletuksen, että määrittelyjoukko $D(T^*)$ ei ole tiheä Hilbert-avaruudessa X. Tällöin on olemassa elementti $h \neq 0$ avaruudessa X, jolle on voimassa $h \perp D(T^*)$. Samoin on $\{0, h\}$ jokaisen joukon X^2 elementin $\{T^*x, -x\}$ ortogonaali, missä x kuuluu operaattorin T^* määrittelyjoukkoon. Täten pätee

$$\{0, h\} \in X^2 \ominus \mathcal{V}G(T^*) = X^2 \ominus \left(\mathcal{V}X^2 \ominus \mathcal{V}^2 G(T)\right) = X^2 \ominus \left(X^2 \ominus G(T)\right) = G(T). \tag{3.5}$$

Olemme osoittaneet ristiriidan, koska yhtälön (3.5) perusteella $h = T0 = 0$. Eli operaattorin T^* määrittelyjoukko $D(T^*)$ on tiheä Hilbert-avaruudessa X ja on olemassa operaattori T^{**}. Lisäksi on voimassa

$$\begin{aligned} G(T^{**}) &= X^2 \ominus \mathcal{V}G(T^*) = X^2 \ominus \mathcal{V}\left(X^2 \ominus \mathcal{V}G(T)\right) \\ &= \mathcal{V}\left(X^2 \ominus \left(X^2 \ominus \mathcal{V}G(T)\right)\right) = \mathcal{V}^2 G(T) = G(T), \end{aligned}$$

eli $T^{**} = T$.□

Lause 3.1.15 *Olkoon T tiheästi määritelty lineaarioperaattori Hilbert-avaruudessa X. Operaattori T^* on silloin ja vain silloin tiheästi määritelty, kun operaattorilla T on suljettu lineaarinen jatko. Tässä tapauksessa operaattori T^{**} on operaattorin T pienin suljettu lineaarinen jatko.*

Todistus Oletamme aluksi, että operaattorin T^* määrittelyjoukko $D(T^*)$ on tiheä avaruudessa X eli operaattori T^{**} on olemassa. Tällöin pätee

$$\begin{aligned} G(T^{**}) &= X^2 \ominus \mathcal{V}G(T^*) = X^2 \ominus \mathcal{V}\left(X^2 \ominus \mathcal{V}[G(T)]\right) \\ &= \mathcal{V}\left(X^2 \ominus \left(X^2 \ominus \mathcal{V}[G(T)]\right)\right) = \mathcal{V}^2[G(T)] = [G(T)], \end{aligned}$$

eli operaattori T^{**} on operaattorin T suljettu lineaarinen jatko. Olkoon operaattori T_1 toinen suljettu lineaarinen jatko operaattorille T. Nyt on voimassa

$$G(T_1) \supset [G(T)] = G\left(T^{**}\right) \text{ ja } T_1 \supset T^{**}$$

eli T^{**} pienin suljettu jatko. Lauseen todistamiseksi toiseen suuntaan oletamme, että operaattorilla T on olemassa suljettu lineaarinen jatko T_1. Koska on voimassa $T \subset T_1$, on $D(T_1)$ tiheä avaruudessa X. Lauseen 3.1.14 perusteella on operaattorin T_1^* määrittelyjoukko $D(T_1^*)$ tiheä avaruudessa X. Koska operaattoreiden T^* ja T_1^* määrittelyjoukoille on voimassa $D(T^*) \supset D(T_1^*)$, on operaattorin T^* määrittelyjoukko $D(T^*)$ tiheä avaruudessa X.

Määritelmä 3.1.16 *Olkoon X Hilbert-avaruus ja $X^{'}$ sen duaaliavaruus. Avaruuden X jono $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti avaruuden X elementtiä x kohti, jos kaikille elementeille $x^{'}$ avaruudesta $X^{'}$ on voimassa*

$$< x_k, x^{'} > \to < x, x^{'} > .$$

Merkitään myös $x_k \rightharpoonup x$.

Määritelmässä 3.1.16 merkintää $< \cdot, \cdot >$ kutsutaan duaaliteetiksi. Koska X on Hilbert-avaruus ja J Fréchet-Rieszin esityslauseessa 3.1.10 isomorfismi, on voimassa $< x, Jy >= (x, y)_X$ (vertaa lause 3.3.1). Voimme siis korvata määritelmässä 3.1.16 duaaliteetin sisätulolla.

Määritelmä 3.1.17 *Lineaarioperaattori K on kompakti, jos jokaisen heikosti suppenevan jonon $\{x_j\}$ kuvajono $\{Kx_j\}$ on vahvasti suppeneva.*

Lause 3.1.18 *Seuraavat neljä ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

1. *Operaattori K on kompakti.*
2. *Jokaisen rajoitetun jonon $\{x_j\}$ kuvajono $\{Kx_j\}$ sisältää suppenevan osajonon.*
3. *Joukko $\overline{K(B_1(0))}$ on kompakti, missä $B_1(0) = \{x \in X|\ ||x|| < 1\}$.*
4. *Jokaisen avaruuden X rajoitetun joukon M kuvajoukon sulkeuma $\overline{K(M)}$ on kompakti.*

Todistus Katso lähteestä [2] lause 8.1 sivulla 236.

Kompaktien operaattoreiden muodostamaa avaruutta merkitään $K(X, Y)$. Kompakti operaattori on jatkuva.

Lause 3.1.19 (Schauder) *Olkoot X ja Y Banach-avaruuksia sekä $X^{'}$ ja $Y^{'}$ niiden duaaliavaruudet. Olkoon $T : X \to Y$ jatkuva ja lineaarinen. Tällöin on voimassa*

$$T \in K(X, Y) \Longleftrightarrow T^{'} \in K(Y^{'}, X^{'}).$$

Todistus Katso lähteestä [2] lause 10.1 sivulla 296.

Lemma 3.1.20 *Olkoot operaattorit T_1 avaruudesta $L(X, Y)$ ja T_2 avaruudesta $L(Y, Z)$. Jos operaattori T_1 tai T_2 on kompakti, niin operaattoritulo T_1T_2 on kompakti. Kompaktien operaattoreiden muodostama avaruus $K(X, Y)$ on avaruuden $L(X, Y)$ suljettu aliavaruus.*

Todistus Katso lähteestä [2] lemma 8.2 sivulla 237.

3.2 Operaattorin koersiivisyys ja Friedrichs-jatko

Määritelmä 3.2.1 *Olkoot H ja V Hilbert-avaruuksia ja V sisältyy avaruuteen H. Jos identtinen kuvaus $I : V \to H$ on jatkuva, on avaruus V jatkuvasti upotettu avaruuteen H, eli on olemassa positiivinen vakio c, jolle on voimassa epäyhtälö*

$$||u||_H \leq c||u||_V.$$

Jos identtinen kuvaus on myös kompakti, niin avaruus V on kompaktisti upotettu avaruuteen H.

Lause 3.2.2 *Avaruus $H_0^{\Gamma_1}(G)$ on jatkuvasti upotettu avaruuteen $H_0^{\Gamma_2}(G)$, jos multi-indeksijoukko $\widetilde{\Gamma}_2$ sisältyy multi-indeksijoukkoon $\widetilde{\Gamma}_1$. Erikoisesti on avaruus $H_0^{\Gamma}(G)$ jatkuvasti upotettu niihin avaruuksiin $H_0^k(G)$, joiden multi-indeksijoukoille on voimassa $\Lambda_k \subset \widetilde{\Gamma}$. Jos multi-indeksijoukko Λ_{m+1} sisältyy multi-indeksijoukkoon $\widetilde{\Gamma}$, on avaruuden $H_0^{\Gamma}(G)$ upotus avaruuteen $H_0^m(G)$ kompakti.*

Todistus Olkoon funktio u avaruudesta $H_0^{\Gamma_1}(G)$. Tällöin on avaruuden määritelmän mukaan olemassa jono (u_k) avaruudessa $C_0^\infty(G)$, jolle pätee

$$\lim_{k\to\infty} ||u_k - u||_0 = 0 \text{ ja } \lim_{k,l\to\infty} ||u_k - u_l||_{\Gamma_1^*} = 0.$$

Jotta olisi voimassa

$$H_0^{\Gamma_1}(G) \subset H_0^{\Gamma_2}(G),$$

on osoitettava, että multi-indeksijoukoille $\widetilde{\Gamma_2} \subset \widetilde{\Gamma_1}$ pätee

$$\lim_{k,l\to\infty} ||u_k - u_l||_{\Gamma_2^*} = 0.$$

Koska on voimassa $\widetilde{\Gamma_2} \subset \widetilde{\Gamma_1}$, pätee funktioille v avaruudesta $C_0^\infty(G)$ epäyhtälö

$$||v||_{\widetilde{\Gamma_2}} \leq ||v||_{\widetilde{\Gamma_1}}.$$

Koska multi-indeksijoukkojen Γ_1^* ja $\widetilde{\Gamma_1}$ avulla määritellyt normit $||\cdot||_{\Gamma_1^*}$ ja $||\cdot||_{\widetilde{\Gamma_1}}$ ovat ekvivalentit, on olemassa sellaiset positiiviset vakiot c_1 ja c_2, että kaikille funktioille v avaruudesta $C_0^\infty(G)$ pätee

$$||v||_{\Gamma_2^*} \leq c_1||v||_{\widetilde{\Gamma_2}} \leq c_1||v||_{\widetilde{\Gamma_1}} \leq c_1c_2||v||_{\Gamma_1^*}.$$

Täten on (u_k) Cauchy-jono myös normin $||\cdot||_{\Gamma_2^*}$ suhteen. Olemme osoittaneet, että avaruus $H_0^{\Gamma_1}(G)$ sisältyy avaruuteen $H_0^{\Gamma_2}(G)$. Avaruuden $H_0^{\Gamma}(G)$ jatkuva upotus avaruuteen $H_0^k(G)$ on edelläolevan erikoistapaus, kun valitaan multi-indeksijoukoiksi $\Gamma_1 = \Gamma$ ja $\Gamma_2 = \Lambda_k$. Avaruuden $H_0^{\Gamma}(G)$ upotuksen avaruuteen $H_0^m(G)$ kompaktisuus seuraa Rellich-Kondrachovin lauseesta (lähteessä [1] lause 6.2 sivulla 144) ja lemmasta 3.1.20. □

Määritelmä 3.2.3 *Olkoot V ja H kaksi kompleksista Hilbert-avaruutta ja avaruus V avaruuden H tiheä aliavaruus. Lineaarioperaattori $T : D(T) \to H$ on avaruudessa H V-koersiivinen, jos $D(T)$ on avaruuden V tiheä aliavaruus ja seuraavat ehdot ovat voimassa*

1. *On olemassa positiivinen vakio c, jolle on kaikille elementeille u ja v avaruudesta $D(T) \subset V$ voimassa*

$$|(Tu, v)_H| \leq c||u||_V||v||_V.$$

2. **(Gårdingin epäyhtälö)** *On olemassa positiiviset vakiot p ja q, joille on kaikille elementeille u avaruudesta $D(T)$ voimassa*

$$\Re e(Tu, u)_H \geq p||u||_V^2 - q||u||_H^2.$$

Operaattori T on V-elliptinen, jos ehdossa (2) voidaan valita $q = 0$.

Tarkastelemme tuloavaruudessa $D(T) \times D(T)$ seskvilineaarimuotoa

$$s_T(u, v) := (Tu, v)_H,$$

missä elementit u ja v kuuluvat avaruuteen $D(T) \subset V$. Koska määrittelyjoukko $D(T)$ on tiheä avaruudessa V ja lauseen 3.2.3 ehto (1) toteutuu, voimme jatkaa seskvilineaarimuodon jatkuvasti avaruuteen $V \times V$. Täten jokainen operaattorin T jatkuva jatko T', jonka määrittelyjoukko $D(T')$ sisältyy avaruuteen V, on myös V-koersiivinen, ja on voimassa $s_T = s_{T'}$.

Huomautus 3.2.4 *Seskvilineaarimuodolle s_T ovat määritelmän 3.2.3 ehdot (1) ja (2) voimassa kaikille elementeille u ja v avaruudesta V samoilla vakiolla c, p ja q kuin lineaarioperaattorille T.*

Määritelmä 3.2.5 *Olkoot V ja H kaksi kompleksista Hilbert-avaruutta, V avaruuden H tiheä aliavaruus ja $D(T)$ avaruuden V tiheä aliavaruus. Lineaarioperaattorin $T : V \to H$ resolventtijoukko $\varrho(T)$ on kaikkien niiden kompleksilukujen λ joukko, joille kuvaus $T - \lambda I : D(T) \to H$ on bijektio ja käänteiskuvaus*

$$R(\lambda, T) := (T - \lambda I)^{-1}$$

on jatkuva lineaarioperaattori avaruudessa H määrittelyalueenaan H, missä I on identtinen operaattori avaruudessa H. Joukkoa

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$$

kutsutaan operaattorin T spektriksi. Kompleksiluku λ on operaattorin T ominaisarvo, kun on operaattorin T määrittelyjoukossa $D(T)$ olemassa sellainen $u \neq 0$, että

$$(T - \lambda I)u = 0.$$

Lause 3.2.6 *Olkoon H äärellisuloitteinen Hilbert-avaruus ja $T : H \to H$ rajoitettu. Tällöin luku 0 kuuluu operaattorin T spektriin $\sigma(T)$.*

Todistus Koska H on äärellisuloitteinen, niin jokainen rajoitettu operaattori $T : H \to H$ on kompakti. Olkoon (e_n) ortonormaali jono Hilbert-avaruudessa H. Koska $e_n \rightharpoonup 0$, pätee $Te_n \to 0$ eli operaattori T ei ole jatkuvasti kääntyvä. □

Lause 3.2.7 *Olkoon H kompleksinen Hilbert-avaruus ja T siinä määritelty itseadjungoitu operaattori. Tällöin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia ja eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisfunktiot keskenään ortogonaalisia. Luvuille λ joukosta $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on operaattori $T - \lambda I$ injektio, ja sen käänteisoperaattori jatkuva. Lisäksi on voimassa*

$$||R(\lambda, T)|| \leq |\Im m \lambda|^{-1}.$$

Todistus Olkoon λ operaattorin T ominaisarvo ja $f \neq 0$ ominaisvektori, kuuluu joukkoon

$$N(\lambda - T) := \{x \in D(T) \mid (\lambda - T)x = 0\}.$$

Tällöin on voimassa

$$\lambda^* ||f||^2 = (Tf, f) = (f, Tf) = \lambda ||f||^2,$$

joten $\lambda^* = \lambda$ ja λ on reaaliluku. Olkoon λ_1 ja λ_2 kaksi eri ominaisarvoa sekä f_1 ja f_2 niihin liittyvät ominaisfunktiot. Tällöin on voimassa

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = (Tf_1, f_2) - (f_1, Tf_2) = 0,$$

missä ominaisarvot λ_j ovat reaalilukuja, eli on voimassa $(f_1, f_2) = 0$. Kompleksiluvulle $\lambda = x+iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja $i^2 = -1$, on kaikille funktioille f avaruudesta $D(T)$ voimassa

$$\begin{aligned} ||(\lambda - T)f||^2 &= ||(x - T)f + iyf||^2 = ||(x - T)f||^2 + |y|^2||f||^2 + ((x - T)f, iyf) + (iyf, (x - T)f) \\ &= ||(x - T)f||^2 + |y|^2||f||^2 \geq |\Im m\lambda|^2||f||^2. \end{aligned}$$

Kun λ kuuluu joukkoon $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on $(\lambda - T)$ injektio, ja funktiolle $g = (\lambda - T)f \in R(T)$ pätee

$$||R(\lambda, T)g|| = ||f|| \leq |\Im m\lambda|^{-1}||(\lambda - T)f|| = |\Im m\lambda|^{-1}||g||. \ \square$$

Lause 3.2.8 *Olkoon H kompleksinen Hilbert-avaruus ja operaattori $T : H \to H$ kompakti. Tällöin pätee*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\},$$

missä

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

on operaattorin T pistespektri. Operaattorilla on korkeintaan numeroituva määrä ominaisarvoja, joiden kasaantumispiste on 0. Jokaisella nollasta eroavalla ominaisarvolla on äärellinen kertaluku.

Todistus Katso lähteestä [29] lause 6.7 sivulla 130.

Määritelmä 3.2.9 *Symmetrinen operaattori $T : H \to H$ on Hilbert-avaruudessa H alhaalta puolirajoitettu, kun on olemassa reaaliluku γ, jolle on kaikille funktioille $u \in D(T) \subset H$ voimassa*

$$(u, Tu) \geq \gamma ||u||_H^2.$$

Jokaista tämän ehdon toteuttavaa lukua γ kutsutaan operaattorin T alarajaksi. Jos 0 on operaattorin T alaraja, niin operaattori T on positiivinen.

Lause 3.2.10 *Olkoon T itseadjungoitu operaattori Hilbert-avaruudessa H. Jos operaattori T on positiivinen, niin kaikki spektrin pisteet ovat positiivisia.*

Todistus Itseadjungoitu operaattori T on silloin ja vain silloin puolirajoitettu, kun sen spektri on alhaalta rajoitettu. Koska positiivinen operaattori T on rajoitettu alhaalta, alarajana 0, on se puolirajoitettu ja on voimassa $0 \leq \min \sigma(T)$. $\square$

Määritelmä 3.2.11 *Olkoon operaattori T_0 V-koersiivinen Hilbert-avaruudessa H. Määrittelemme operaattorille T_0 jatkon T operaattoriin T_0 liittyvän seskvilineaarimuodon s_{T_0} avulla*

$$D(T) := \{u \in V |\ \text{on olemassa}\, w \in H \text{ siten, että kaikille}\, v \in V : (T_0 u, v) = (w, v)_H\}$$

ja asetetaan $Tu = w$ kaikille funktioille v avaruudesta V ja u operaattorin T_0 jatkon T määrittelyjoukosta. Operaattorijatko T on yksikäsitteisesti määritelty. Kutsumme operaattoria T operaattorin T_0 Friedrichs-jatkoksi.

Huomautus 3.2.12 *Jos operaattori T_0 on symmetrinen, niin sen Friedrichs-jatkon määrittelyjoukko on*

$$D(T) = V \cap D(T_0^*).$$

Lause 3.2.13 *Friedrichs-jatko T V-koersiiviselle operaattorille T_0 on suljettu lineaarioperaattori. Jos V-koersiivinen operaattori T_0 on symmetrinen, niin sen Friedrichs-jatko T on itseadjungoitu.*

3.3 Fredholmin alternatiivi

Olkoot V ja H kaksi kompleksista Hilbert-avaruutta ja avaruus V kompaktisti upotettu avaruuteen H. Tarkastelemme V-koersiivistä operaattoria T avaruudessa H, ja siihen liittyvää seskvilineaarimuotoa

$$s_T(u, v) = (Tu, v)_H$$

funktioille $u, v \in D(T) \subset V$. Jatkamme seskvilineaarimuodon s_T jatkuvasti avaruuteen $V \times V$, jolloin V-koersiivisyyden määritelmän mukaan operaattorin T määrittelyjoukko $D(T)$ on tiheä avaruudessa H.

Lause 3.3.1 (Riesz-Fischerin lause) *Olkoon $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ Hilbert-avaruus ja V' sen duaaliavaruus. Määritellään kuvaus $J : V \to V'$ seuraavasti*

$$Ju(v) := (u, v)_V.$$

Kuvaukselle J ovat seuraavat ehdot voimassa:

1. *$J(u + v) = J(u) + J(v)$ ja $J(\alpha u) = \overline{\alpha} J(u)$.*
2. *J on isometrinen.*
3. *J on surjektio.*

Kutsumme kuvausta $J : V \to V'$ Riesz-kuvaukseksi.

Todistus Kohta 1 on selvä. Kun on voimassa $u \neq 0$, pätee Cauchy-Schwarzin epäyhtälön (2.1)

$$|Ju(v)| = |(u, v)_V| \leq ||v||\, ||v||$$

eli $||Ju|| \leq ||u||$. Lisäksi pätee

$$||Ju(\frac{u}{||u||})|| = ||u||,$$

joten toinen kohta on todistettu. Kolmas kohta seuraa Fréchet-Rieszin esityslauseesta 3.1.10. □

Lause 3.3.2 (Lax-Milgramin lause) *Olkoon X Hilbert-avaruus ja $a : X \times X \to \mathbb{C}$ seskvilineaarimuoto, jolle on kaikille elementeille x ja y avaruudesta X voimassa*

1. $|a(x,y)| \leq C_0||x||_X||y||_X$,
2. $\Re e a(x,x) \geq c_0||x||_X^2$,

missä $0 < c_0 \leq C_0 < \infty$. Tällöin on olemassa tasan yksi sellainen jatkuva lineaarinen bijektio T joukossa $L(X)$, jolle on kaikille elementeille x ja y avaruudesta X voimassa

$$a(x,y) = (Tx,y)_X.$$

Lisäksi on operaattori T kääntyvä, $||T|| \leq C_0$ ja $||T^{-1}|| \leq \frac{1}{c_0}$.

Todistus Olkoon $x \in X$ ja $y \mapsto a(x,y)$ lineaarinen $X \to \mathbb{C}$. Tällöin on Fréchet-Rieszin esityslauseen 3.1.10 perusteella olemassa yksikäsitteinen elementti $u \in X$, jolle on kaikille $y \in X$ voimassa

$$a(x,y) = (u,y)_X.$$

Asetetaan $Tx = u$, joten pätee

$$||Tx|| = ||a(x,\cdot)|| \leq C_0||x||.$$

Lisäksi on voimassa

$$c_0||x||^2 \leq \Re e a(x,x) = \Re e(Tx,x)_X \leq ||Tx||\,||x||,$$

joten kaikille $x \in X$ pätee $c_0||x|| \leq ||Tx||$.□

Tehtävä 3.3.3 *Olkoot H ja V Hilbert-avaruuksia. Etsi annetulle funktiolle $f \in H$ kaikki sellaiset funktiot $u \in V$, jotka toteuttavat kaikille funktioille v avaruudesta V yhtälön*

$$s_T(u,v) = (f,v)_H, \tag{3.6}$$

missä seskvilineaarimuoto $s_T(u,v) = (Tu,v)_H$ on V-koersiivinen.

Jotta voimme tarkastella tehtävän 3.3.3 ratkeavuutta, kirjoitamme sen hieman toiseen muotoon. Kun avaruus V on upotettu avaruuteen H, on olemassa positiivinen vakio c, jolle on kaikille funktioille u avaruudesta V voimassa

$$||u||_H \leq c||u||_V.$$

Lisäksi on elementeille f avaruudesta H ja v avaruudesta V voimassa

$$|(f,v)_H| \leq c||f||_H||v||_V \tag{3.7}$$

eli $(f,\cdot)_H \in V'$, missä V' on avaruuden V duaaliavaruus. Riesz-Fischerin lauseen 3.3.1 nojalla on olemassa isometrinen isomorfismi $J : V \to V'$, jolle on voimassa

$$Ju(v) = (u,v)_V$$

kaikille funktioille u ja v avaruudesta V. Olkoon

$$g_f := J^{-1}(f, \cdot)_H,$$

joka määrää kaikille funktioille v avaruudesta V yksikäsitteisesti avaruuden V elementin

$$(g_f, v)_V = (f, v)_H.$$

Asetetaan $v = g_f$. Ehdon (3.7) perusteella on kaikille funktioille f avaruudesta H voimassa epäyhtälö

$$||g_f||_V \leq c||f||_H.$$

Kun seskvilineaarimuoto $s_T(\cdot, \cdot)$ on rajoitettu, on jokaiselle mielivaltaiselle elementille u avaruudesta V lineaarinen funktionaali $s_T(u, \cdot)$ elementti duaaliavaruudessa V'. Riesz-Fischerin lauseen 3.3.1 ja Riesz-kuvauksen J avulla voimme määritellä jatkuvan ja rajoitetun kuvauksen $T : V \to V$, missä

$$Tu = J^{-1}s_T(u, \cdot).$$

Kuvaukselle T on kaikille funktioille u avaruudesta V voimassa

$$||Tu||_V \leq c||J^{-1}||_{V' \to V}||u||_V.$$

Kuvauksen T avulla on funktiolle f avaruudesta H yhtälön (3.6) ratkaisevan avaruuden V funktion u löytäminen sama asia kuin löytää sellainen funktio u avaruudesta V, joka ratkaisee yhtälön

$$Tu = g_f. \tag{3.8}$$

Lemma 3.3.4 *V-koersiiviseen seskvilineaarimuotoon $s_T(\cdot, \cdot)$ liittyvä operaattori T voidaan hajoittaa $T = D + K$, missä $D : V \to V$ on rajoitettu ja rajoitetusti kääntyvä lineaarioperaattori ja $K : V \to V$ kompakti lineaarioperaattori.*

Todistus Olkoon $i \in L(V, H)$ kanoninen upotus. Tällöin on kaikille elementeille u ja v avaruudesta V voimassa

$$|s_T(u, v) + q(u, v)_H| \leq C||u||_V||v||_V + q||i||^2_{L(V,H)}||u||_V||v||_V = \left[C + q||i||^2_{L(V,H)}\right]||u||_V||v||_V.$$

Koska kaikille elementeille u avaruudesta V on voimassa

$$\Re e s_T(u, u) + q(u, u)_H \geq p||u||^2_V,$$

on $s_T(\cdot, \cdot) + q(\cdot, \cdot)$ V-elliptinen bilineaarimuoto. Lax-Milgramin lauseen 3.3.2 nojalla on olemassa rajoitettu ja rajoitetusti kääntyvä lineaarioperaattori $D : V \to V$, jolle on kaikille elementeille u ja v avaruudesta V voimassa

$$(Du, v)_V = s_T(u, v) + q(u, v)_H.$$

Määrittelemme uuden operaattorin $K : V \to V$ seuraavasti $K := T - D$. Selvästi operaattori K on lineaarinen ja kaikille elementeille u ja v avaruudesta V pätee

$$(Ku, v)_V = -q(u, v)_H.$$

Kun $J : V \to V'$ ja $\overline{J} : H \to H'$ ovat Riesz-kuvauksia ja $i^* : H' \to V'$ on kompaktin upotuksen i kompakti adjungaatti, joka seuraa Schauderin lauseesta 3.1.19, voimme kirjoittaa operaattorin K muotoon

$$K = -q(J^{-1} \circ i^* \circ \overline{J} \circ i).$$

Täten on operaattori K kompakti. □

Määritelmä 3.3.5 *Olkoon V Hilbert-avaruus. Rajoitettua lineaarioperaattoria $T : V \to V$ kutsutaan Fredholm-operaattoriksi, kun avaruudet* $\ker T$ *ja* $V/R(T)$ *ovat äärellisuloitteisia. Kokonaislukua*

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim V/R(T)$$

kutsutaan operaattorin T indeksiksi.

Lause 3.3.6 (Fredholmin alternatiivi) *Jos seskvilineaarimuoto $s_T(\cdot,\cdot)$ on V-elliptinen, on olemassa jokaiselle avaruuden H funktiolle f yhtälössä*

$$s_T(u,\cdot) = (f,\cdot)_H$$

yksikäsitteinen ratkaisu u avaruudessa V ja funktiosta f riippumaton positiivinen reaalinen vakio c, jolle pätee

$$||u||_H \le c||f||_H. \tag{3.9}$$

Jos $s_T(\cdot,\cdot)$ on V-koersiivinen, pätee tehtävälle 3.3.3 Fredholmin alternatiivi eli joko on olemassa kaikille funktioille f avaruudesta H yksikäsitteinen ratkaisu u avaruudessa V tai sitten tehtävä 3.3.3 ei ole ratkaistavissa kaikille funktioille f avaruudesta H. Toisessa tapauksessa on tehtävä 3.3.3 täsmälleen silloin yksikäsitteisesti ratkaistavissa kaikille funktioille f avaruudesta H, kun $g_f \in (\ker T^*)^\perp$. *Jos tehtävä 3.3.3 on ratkeava, niin kaikille avaruuden H funktioille f on voimassa, että siihen liittyvä ratkaisu u avaruudesta V toteuttaa epäyhtälön (3.9) tietyllä vakiolla* $c \in \mathbb{R}^+$.

Todistus Lax-Milgramin lauseen 3.3.2 perusteella rajoitettu kuvaus $T : V \to V$ on kääntyvä ja pätee

$$||T^{-1}||_{V\to V} \le \rho^{-1},$$

joten $u := T^{-1}g_f$ on yhtälön (3.8) yksikäsitteinen ratkaisu. Tälle ratkaisulle u on voimassa

$$||u||_H \le c||u||_V \le c||T^{-1}||_{V\to V}||g_f||_V \le c^2\rho^{-1}||f||_H,$$

joten ehto (3.9) on todistettu. Kirjoitamme operaattorin T summana kompaktista lineaarikuvauksesta $K : V \to V$ ja rajoitetusta sekä rajoitetusti kääntyvästä lineaarikuvauksesta $D : V \to V$. Nyt on voimassa

$$T = D + K = D(I + D^{-1}K),$$

missä $I : V \to V$ on identtinen kuvaus, ja T on Fredholm-operaattori indeksillä 0 (vertaa lemma 24.3 sivulla 104 ja seuraus 25.3 sivulla 109 lähteessä [11]). □

Lause 3.3.7 *Olkoon operaattori T_0 V-elliptinen. Sen Friedrichs-jatko $T : D(T) \to H$ on bijektio ja käänteisoperaattori $T^{-1} : H \to D(T)$ jatkuva.*

Todistus Operaattoriin T_0 liittyvä seskvilineaarimuoto

$$s_{T_0}(u,v) := (T_0u,v)_H$$

on määritelty avaruudessa $V \times V$ kaikille elementeille u ja v operaattorin T_0 määrittelyjoukosta, ja sen jatkuva jatko T on määritelty kaikille elementeille u ja v avaruudesta V. Lax-Milgramin lauseen 3.3.2 perusteella on olemassa tasan yksi jatkuva lineaarinen bijektio $B : V \to V$, jolle on kaikille avaruuden V elementeille u ja v voimassa

$$s_{T_0}(u,v) = (Bu,v)_V. \tag{3.10}$$

Olkoon $f \in H$ mielivaltainen. Kuvaus $(f,\cdot) : V \to \mathbb{C}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, jolle on Fréchet-Rieszin esityslauseen 3.1.10 mukaan olemassa sellainen yksikäsitteinen elementti w avaruudessa V, että kaikille elementeille v avaruudesta V pätee

$$(f,v)_H = (w,v)_V. \tag{3.11}$$

Tälle elementille w asetamme $u := B^{-1}w$. Sijoittamalla se yhtälöön (3.10) saamme kaikille avaruuden V elementeille v

$$s_{T_0}(u,v) = (w,v)_V = (f,v)_H.$$

Täten elementti u kuuluu operaattorin T_0 Friedrichs-jatkon T määrittelyjoukkoon ja kaikille elementeille v avaruudesta H pätee

$$(Tu,v)_H = s_{T_0}(u,v) = (f,v)_H \text{ ja } Tu = f$$

eli operaattori T on surjektio. Injektiivisyyden todistamiseksi kirjoitamme kaikille avaruuden V elementeille u ja v yhtälön (3.10) muotoon

$$(Tu,v)_H = (Bu,v)_V.$$

Ehdosta $Tu = 0$ seuraa kaikille elementeille v avaruudesta V tulos $Bu = 0$, josta edelleen operaattorin B injektiivisyyden nojalla $u = 0$. Avaruus V on upotettu jatkuvasti avaruuteen H, eli positiiviselle vakiolle c pätee epäyhtälö

$$||w||_H \leq c||w||_V.$$

Tässä vaiheessa tarvitsemme operaattorin $B^{-1} : H \to H$ jatkuvuutta, jotta voimme tarkastella operaattorin T^{-1} jatkuvuutta

$$||T^{-1}f||_H = ||u||_H = ||B^{-1}w||_H \leq ||B^{-1}||\,||w||_H \leq c||B^{-1}||\,||w||_V.$$

Asetamme yhtälössä (3.11) $v = w$ ja käytämme Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä (2.1) ja tietoa, että avaruus V on jatkuvasti upotettu avaruuteen H

$$||w||_V^2 = |(f,w)_H| \leq ||f||_H||w||_H \leq c||f||_H||w||_V,$$

mistä seuraa epäyhtälö

$$||T^{-1}f||_H \leq c^2||B^{-1}||\,||f||_H$$

ja lopulta käänteisoperaattorin T^{-1} jatkuvuus. □

Luku 4

Sovellutus differentiaalioperaattoriin $L(D)$

Voit reilusti heilua svengissä, et elämästä selviä hengissä
(Juice Leskinen)

Tässä luvussa sovellamme edellisten lukujen tuloksia ja määritelmiä todelliseen osittaisdifferentiaaliyhtälöön. Näytämme, että differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u(x,y) - \lambda e(x,y) u(x,y) = f(x,y)$$

määrittelemä differentiaalioperaattori (4.1) on Banach-avaruudessa $L^2(R)$ $H_0^\Gamma(R)$-koersiivinen. Jotta voisimme ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälömme, on ensin selvitettävä käänteisoperaattorin olemassaolo ja kompaktisuus. Tähän tarkasteluun paneudumme tämän luvun toisessa ja kolmannessa osassa. Apuna käytämme Greenin funktiota ja operaattorimme Friedrichs-jatkoa. Meille selviää, että operaattorimme on Hilbert-Schmidt-operaattori ja siten kompakti.

4.1 Operaattorin $L(D)$ koersiivisyys

Lemma 4.1.1 *Olkoon $R = (a,c) \times (b,d) \subset \mathbb{R}^2$ ja operaattori $A : C_0^\infty(R) \to L^2(R)$. Operaattori*

$$A = L(D) = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda e(\cdot,\cdot) I \tag{4.1}$$

on avaruudessa $L^2(R)$ $H_0^\Gamma(R)$-koersiivinen multi-indeksijoukolla $\Gamma = \{(0,0),(1,1)\}$. Kun on voimassa ehto

$$|\Re e\lambda| < \frac{\pi^4}{M(c-a)^2(d-b)^2},$$

on operaattori A myös $H_0^\Gamma(R)$-elliptinen.

Todistus Avaruudet $L^2(R)$ ja $H_0^\Gamma(R)$ ovat kompleksisia Hilbert-avaruuksia ja avaruus $H_0^\Gamma(R)$ on upotettu jatkuvasti ja tiheästi avaruuteen $L^2(R)$. Lisäksi on $C_0^\infty(R)$ avaruuden $H_0^\Gamma(R)$ tiheä aliavaruus. Funktioille u ja v operaattorin A määrittelyjoukosta on voimassa määritelmän 3.2.3 ehto (1)

$$\begin{aligned}|(Au,v)_0| &= |(D^{11}u,D^{11}v)_0-(\lambda eu,v)_0| \leq |(D^{11}u,D^{11}v)_0|+|(\lambda eu,v)_0| \\ &\leq ||D^{11}u||_0||D^{11}v||_0+||\lambda eu||_0||v||_0 \leq ||u||_{\Gamma^*}||v||_{\Gamma^*}+|\lambda|M||u||_0||v||_0\end{aligned}$$

multi-indeksijoukolle $\Gamma^*=\{(1,1)\}$. Poincarén epäyhtälö

$$||\psi||_0 \leq d_{\Gamma^*}(R)||D^{11}\psi||_0 = d_{\Gamma^*}(R)||\psi||_{\Gamma^*}$$

on voimassa, kun funktio ψ kuuluu avaruuteen $C_0^\infty(R)$ ja

$$d_{\Gamma^*}(R)=\frac{(c-a)(d-b)}{\pi^2}.$$

Näin saamme määritelmän 3.2.3 ehdossa (1) tarvittavan vakion

$$|(Au,v)_0| \leq \left(1+|\lambda|Md^2_{\Gamma^*}(R)\right)||u||_{\Gamma^*}||v||_{\Gamma^*}$$

ja $||\cdot||_{\Gamma^*}$ on normi avaruudessa $H_0^\Gamma(R)$. Gårdingin epäyhtälö 3.2.3.2 on voimassa, jos on olemassa sellaiset luvut $p>0$ ja $q\geq 0$, että kaikille funktioille u avaruudesta $C_0^\infty(R)$ pätee

$$\Re e\left(D^{22}u-\lambda eu,u\right)_0 \geq p||u||^2_{\Gamma^*}-q||u||^2_0.$$

Vasemman puolen voimme kirjoittaa osittaisintegroinnin avulla toiseen muotoon

$$\Re e\left((D^{22}u,u)_0-(\lambda eu,u)_0\right)=||u||^2_{\Gamma^*}-\Re e(\lambda eu,u)_0.$$

Koska on voimassa

$$\Re e(\lambda eu,u)_0=\Re e\lambda(eu,u)_0 \leq |\Re e\lambda|M||u||^2_0,$$

niin pätee myös

$$-\Re e(\lambda eu,u)_0 \geq -|\Re e\lambda|M||u||^2_0,$$

ja voimme valitaan luvut $p=1$ ja $q\geq|\Re e\lambda|M$, joten Gårdingin epäyhtälö on voimassa. Poincarén epäyhtälön mukaan pätee lisäksi

$$-|\Re e\lambda|M||u||^2_0 \geq -|\Re e\lambda|Md^2_{\Gamma^*}(R)||u||^2_0.$$

Kun valitaan $p\leq 1-|\Re e\lambda|Md^2_{\Gamma^*}(R)$, niin on voimassa

$$||u||^2_{\Gamma^*}-|\Re e\lambda|Md^2_{\Gamma^*}||u||^2_{\Gamma^*} \geq p||u||^2_{\Gamma^*}$$

ja Gårdingin epäyhtälö toteutuu luvuille $p>0$ ja $q=0$. Siis operaattori A on $H_0^\Gamma(R)$-elliptinen. Kun on voimassa

$$|\Re e\lambda| < \frac{\pi^4}{M(c-a)^2(d-b)^2},$$

on

$$|\Re e\lambda|Md^2_{\Gamma^*}(R)=\frac{|\Re e\lambda|M(c-a)^2(d-b)^2}{\pi^4}<1$$

ja

$$1-|\Re e\lambda|Md^2_{\Gamma^*}>0.$$

Jos luku λ toteuttaa ylläolevan ehdon, löydämme sellaisen positiivisen luvun p, joka toteuttaa Gårdingin epäyhtälön luvulle $q=0$. □

4.2 Operaattori $D^{(2,2)}$ on tulo-operaattori

Tarkastellaan suorakaiteessa $R = (a, c) \times (b, d) \subset \mathbb{R}^2$ neljännen asteen differentiaalioperaattoria D^{22}. Väleillä $I_1 = (a, c)$ ja $I_2 = (b, d)$ määritellään kaksi tavallista toisen asteen differentiaalioperaattoria

$$P_1 = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{jonka määrittelyjoukko } D(P_1) \text{ on } C_0^\infty(I_1), \text{ kun } x \text{ kuuluu väliin } I_1$$
$$P_2 = -\frac{d^2}{dy^2}, \quad \text{jonka määrittelyjoukko } D(P_2) \text{ on } C_0^\infty(I_2), \text{ kun } y \text{ kuuluu väliin } I_2,$$

joiden avulla määritellään tulo-operaattori $L_0 = P_1 P_2$, jonka määrittelyalue on $D(L_0) = C_0^\infty(R)$. Tarkastellaan seuraavaksi operaattoreiden P_1 ja P_2 ominaisuuksia. Operaattoreiden samankaltaisuuden vuoksi riittää tarkastella vain toista operaattoria. Merkitään

$$P_1 = -\frac{d^2}{dx^2} = D^2, \quad D(P_1) = C_0^\infty(I_1), \quad D = -i\frac{\partial}{\partial x} \text{ ja } \Gamma = \{0, 1\} \subset \mathbb{N}_0^1.$$

Etsitään operaattorin P_1 Friedrichs-jatko P. Olkoon $I = I_1$ väli.

Lause 4.2.1 *Operaattori P_1 on symmetrinen, elliptinen ja $H_0^1(I)$-elliptinen. Operaattorin P_1 Friedrichs-jatkon P määrittelyalue on*

$$D(P) = H_0^1(I) \cap H^2(I).$$

Todistus Symmetria seuraa osittaisintegroinnilla avaruuden $C_0^\infty(I)$ funktioille u ja v

$$(P_1 u, v)_0 = (D^2 u, v)_0 = (u, D^2 v)_0 = (u, P_1 v)_0.$$

Koska joukko I sisältyy avaruuteen $\mathbb{R}^2$ ja symboli ξ kuuluu joukkoon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on voimassa $\xi^2 \neq 0$, joten operaattori P_1 on elliptinen. Kompleksinen Hilbert-avaruus $H_0^1(I)$ on jatkuvasti ja tiheästi upotettu kompleksiseen Hilbert-avaruuteen $L^2(I)$ ja avaruus $C_0^\infty(I)$ on avaruuden $H_0^1(I)$ tiheä aliavaruus. Osittaisintegroinnin ja Cauchy-Schwarzin epäyhtälön (2.1) perusteella pätee

$$|(P_1 u, v)_0| = |(D^2 u, v)_0| = |(Du, Dv)_0| \leq ||Du||_0 ||Dv||_0 = ||u||_{\Gamma_0^*} ||v||_{\Gamma_0^*}$$

funktioille u ja v avaruudesta $C_0^\infty(I)$, joten määritelmän 3.2.3 ehto (1) toteutuu. Operaattorin P_1 H_0^1-elliptisyyden osoittamiseksi on löydettävä sellainen positiivinen luku p, jolle on voimassa

$$\Re e(P_1 u, u)_0 \geq p||u||_1^2$$

kaikille funktioille u avaruudesta $C_0^\infty(I)$. Symmetrian vuoksi on sisätulo $(P_1 u, u)_0$ reaalinen ja osittaisintegroinnin avulla saamme

$$(P_1 u, u)_0 = (D^2 u, u)_0 = (Du, Du)_0 = ||Du||_0^2 = ||u||_{\Gamma_0^*}^2,$$

joten Gårdingin epäyhtälö on voimassa. Määritellään $H_0^1(I)$-elliptiseen operaattoriin P_1 liittyvä seskvilineaarimuoto

$$s_{P_1}(u, v) := (P_1 u, v)_0 = (D^2 u, v)_0 = (D^1 u, D^1 v)_0$$

funktioille u ja v joukosta

$$D(P_1) = C_0^\infty(I)$$

ja sen jatkuva jatko funktioille u ja v avaruudesta $H_0^1(I)$. Friedrichs-jatkon määritelmän mukaan on operaattorin P_1 jatkon P määrittelyjoukko

$$D(P) = \{u \in H_0^1(I) \mid \text{on olemassa } w \in L^2(I) \text{ kaikille } v \in H_0^1(I) \,:\, (D^1u, D^1v)_0 = (w, v)_0\}.$$

Jos jollekin funktiolle u avaruudesta $H_0^1(I)$ on heikko derivaatta D^2u olemassa, yllä olevassa joukossa voidaan kirjoittaa $w = D^2u$. Täten on voimassa

$$H_0^1(I) \cap H^2(I) \subset D(P).$$

Määritelmän mukaan joukko $D(P)$ sisältyy avaruuteen $H_0^1(I)$, joten on vielä näytettävä, että joukko $D(P)$ sisältyy avaruuteen $H^2(I)$. Olkoon funktio u joukossa $D(P)$. Määritelmän mukaan on olemassa sellainen funktio w avaruudessa $L^2(I)$, jolle on voimassa

$$(D^1u, D^1v)_0 = (w, v)_0$$

kaikille funktioille $v \in C_0^\infty(I) \subset H_0^1(I)$. Osittaisintegroinnin avulla saamme

$$(u, D^2v)_0 = (w, v)_0$$

kaikille avaruuden $C_0^\infty(I)$ funktioille v, joten avaruuden $L^2(I)$ funktio w on funktion u toinen heikko derivaatta ja funktio u kuuluu avaruuteen $W^2(I) = H^2(I)$. □

Tarkastelemme seuraavaksi Hilbert-Schmidt-operaattoreita, jotka muodostavat yhden tärkeimmistä kompaktien operaattoreiden luokista.

Määritelmä 4.2.2 (Hilbert-Schmidt-operaattori) *Olkoot H ja V Hilbert-avaruuksia. Rajoitettu operaattori $T : H \to V$ on Hilbert-Schmidt-operaattori, kun on olemassa ortonormaalikanta (e_n) avaruudessa H, jolle on voimassa*

$$\sum_n ||Te_n||^2 < \infty.$$

Lause 4.2.3 *Olkoot H ja V Hilbert-avaruuksia. Rajoitettu operaattori $T : H \to V$ on täsmälleen silloin Hilbert-Schmidt-operaattori, kun T^* on Hilbert-Schmidt-operaattori. Tällöin on ortonormaalikannoille (e_n) avaruudesta H ja $(\widetilde{e}_m)$ avaruudesta V voimassa*

$$||T|| \leq \left(\sum_n ||Te_n||^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_m ||T^*\widetilde{e}_m||^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{4.2}$$

Todistus Olkoon T Hilbert-Schmidt-operaattori ja (e_n) ortonormaalikanta avaruudesta H, jolle on voimassa

$$\sum_n ||Te_n||^2 < \infty.$$

Kun $(\widetilde{e}_m)$ on avaruuden V ortonormaalikanta, niin pätee

$$\sum_m ||T^*\widetilde{e}_m||^2 = \sum_m \sum_n |(T^*\widetilde{e}_m, e_n)|^2 = \sum_n \sum_m |(\widetilde{e}_m, Te_n)|^2 = \sum_n ||Te_n||^2,$$

joten T^* on Hilbert-Schmidt-operaattori. Samalla tavoin todistetaan lauseen toinen suunta ja yhtäsuuruus ehdossa (4.2). Olkoon $(\widetilde{e}_m)$ avaruuden V ortonormaalikanta. Tällöin on kaikille avaruuden H funktioille f voimassa

$$||Tf||^2 = \sum_m |(\widetilde{e}_m, Tf)|^2 \leq ||f||^2 \sum_m ||T^*\widetilde{e}_m||^2,$$

joten

$$||T||^2 \leq \sum_m ||T^*\widetilde{e}_m||^2.$$

Täten on ehto (4.2) täysin todistettu. □

Seuraus 4.2.4 *Olkoot H, V ja Z Hilbert-avaruuksia sekä $T : H \to V$ ja $S : V \to Z$ rajoitettuja operaattoreita. Olkoon ainakin toinen operaattoreista T ja S Hilbert-Schmidt-operaattori. Tällöin on tulo-operaattori ST Hilbert-Schmidt-operaattori.*

Todistus Olkoon T Hilbert-Schmidt-operaattori ja (e_n) ortonormaalikanta Hilbert-avaruudessa H. Tällöin on voimassa

$$\sum_n ||STe_n||^2 \leq ||S||^2 \sum_n ||Te_n||^2 < \infty.$$

Olkoon nyt operaattori S Hilbert-Schmidt. Nyt on lauseen 4.2.3 ja edellä olleen perusteella T^*S^* Hilbert-Schmidt-operaattori, joten myös operaattori $ST = (T^*S^*)^*$ Hilbert-Schmidt. □

Lause 4.2.5 *Olkoot M_1 ja M_2 avaruuden $\mathbb{R}^n$ mitallisia osajoukkoja. Rajoitettu operaattori $T : L^2(M_1) \to L^2(M_2)$ on Hilbert-Schmidt-operaattori, jos on olemassa ydin k tuloavaruudessa $L^2(M_2 \times M_1)$, joka toteuttaa yhtälön*

$$Tf(x) = \int_{M_1} k(x, y)f(y)dy$$

kaikille funktioille f avaruudesta $L^2(M_1)$ melkein kaikkialla joukossa M_2.

Todistus Katso lähteestä [29] lause 6.11 sivulla 135.

Lause 4.2.6 *Operaattorin P_1 Friedrichs-jatko $P : D(P) \to L^2(I)$ on bijektio ja käänteisoperaattori $P^{-1} : L^2(I) \to D(P)$ on jatkuva. Funktiolle f avaruudesta $L^2(I)$ on voimassa*

$$P^{-1}f(x) = \int_I g_0(x, s)f(s)ds, \tag{4.3}$$

missä $g_0 : I \times I \to \mathbb{R}$ on Greenin funktio,

$$g_0(x, s) = \frac{1}{(a_2 - a_1)} \cdot \begin{cases} (s - a_1)(a_2 - x), & s \leq x \\ (x - a_1)(a_2 - s), & s > x \end{cases}.$$

Koska funktio g_0 kuuluu tuloavaruuteen $L^2(I \times I)$, niin P^{-1} on Hilbert-Schmidt-operaattori.

Todistus Operaattori P_0 on H_0^1-elliptinen. Valitsemalla lauseessa 3.3.7 avaruudeksi H avaruus $L^2(I)$ on Friedrichs-jatko bijektio ja käänteisoperaattori jatkuva. Integraalioperaattorin P^{-1} ydin g_0 on rajoitettu ja se kuuluu tuloavaruuteen $L^2(I \times I)$, missä joukon R osajoukko I on mitallinen. Operaattorin P bijektiivisyyden nojalla voimme tarkastella kaikille funktioille f avaruudesta $L^2(I)$ yhtälöä

$$f(x) = P \int_I g_0(x,s)f(s)ds.$$

On siis todistettava, että funktio

$$u(x) := \int_I g_0(x,s)f(s)ds$$

kuuluu operaattorin P määrittelyjoukkoon

$$D(P) = H_0^1(I) \cap H^2(I).$$

Koska avaruus $C_0^\infty(I)$ on tiheä avaruudessa $L^2(I)$, on olemassa avaruudessa $C_0^\infty(I)$ jono (f_n), jolle on voimassa

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_0 = 0.$$

Määrittelemme seuraavaksi jonon (f_n) alkioiden avulla uuden jonon

$$u_n(x) := \int_I g_0(x,s)f_n(s)ds.$$

Jotta funktio u kuuluisi avaruuteen $H^2(I)$ on osoitettava, että jono (u_n) kuuluu avaruuteen $C_*^2(I)$ ja

$$\lim_{n\to\infty} ||u - u_n||_0 = 0.$$

Lisäksi on osoitettava, että jonot (Du_n) ja (D^2u_n) ovat avaruudessa $L^2(I)$ Cauchy-jonoja. Olkoon $(u_n) \subset C_*^2(I)$. Cauchy-Schwarzin epäyhtälön (2.1) perusteella on voimassa

$$|u_n(x)|^2 \leq \int_I |g_0(x,s)|^2 ds \int_I |f_n(s)|^2 ds < \infty,$$

joten funktio u_n kuuluu avaruuteen $L^2(I)$. Seuraavaksi tarkastellaan funktion u_n ensimmäistä derivaattaa

$$Du_n(x) = -i\frac{d}{dx}\int_I g_0(x,s)f_n(s)ds = \frac{-i}{a_2 - a_1}\left[\int_{a_1}^x (a_1 - s)f_n(s)ds + \int_x^{a_2} (a_2 - s)f_n(s)ds\right].$$

Käytetään Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä (2.1), eli on voimassa

$$\int_I |Du_n(x)|^2 dx < \infty,$$

joten funktio Du_n kuuluu avaruuteen $L^2(I)$ ja siten funktio u_n avaruuteen $C_*^1(I)$. Lasketaan toinen derivaatta

$$\begin{aligned} D^2u_n(x) &= -i\frac{d}{dx}Du_n(x) = \frac{-1}{a_2 - a_1}\left[\frac{d}{dx}\int_{a_1}^x (a_1 - s)f_n(s)ds + \frac{d}{dx}\int_x^{a_2} (a_2 - s)f_n(s)ds\right] \\ &= \frac{1}{a_1 - a_2}\left[(a_1 - x)f_n(x) - (a_2 - x)f_n(x)\right] = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_2}f_n(x) = f_n(x). \end{aligned}$$

Koska funktio $f_n(x)$ kuuluu avaruuteen $C_0^\infty(I)$, joka on tiheä avaruudessa $L^2(I)$, niin jono (u_n) sisältyy avaruuteen $C_*^2(I)$. Osoitetaan seuraavaksi, että (u_n) on Cauchy-jono.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} ||u-u_n||_0^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_I \left| \int_I g_0(x,s)f(s)ds - \int_I g_0(x,s)f_n(s)ds \right|^2 dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I \left| \int_I g_0(x,s)(f-f_n)(s)ds \right|^2 dx \\
&\le \lim_{n\to\infty} \int_I \left(\int_I |g_0(x,s)|^2 ds \int_I |(f-f_n)(s)|^2 ds \right) dx = 0,
\end{aligned}$$

koska ensimmäinen integraali on äärellinen ja toinen menee kohti nollaa, kun n kasvaa. Osoitetaan, että (Du_n) on Cauchy-jono. Positiivisille luvuille a ja b on voimassa

$$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2),$$

joten pätee

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} ||Du_n - Du_m||_0^2 &= \lim_{n,m\to\infty} \int_I \left| \frac{-i}{a_2-a_1} \left[\int_{a_1}^x (a_1-s)f_n(s)ds + \int_x^{a_2} (a_2-s)f_n(s)ds \right.\right. \\
&- \left.\left. \int_{a_1}^x (a_1-s)f_m(s)ds - \int_x^{a_2} (a_2-s)f_m(s)ds \right] \right|^2 dx \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{(a_2-a_1)^2} \int_I \left[\left| \int_{a_1}^x (a_1-s)(f_n-f_m)(s)ds \right.\right. \\
&+ \left.\left. \int_x^{a_2} (a_2-s)(f_n-f_m)(s)ds \right|^2 \right] dx \\
&\le \lim_{n,m\to\infty} \frac{2}{(a_2-a_1)^2} \int_I \left[\left| \int_{a_1}^x (a_1-s)(f_n-f_m)(s)ds \right|^2 \right. \\
&+ \left. \left| \int_x^{a_2} (a_2-s)(f_n-f_m)(s)ds \right|^2 \right] dx \\
&\le \lim_{n,m\to\infty} \frac{2}{(a_2-a_1)^2} \int_I \left[\int_{a_1}^x |a_2-s|^2 ds \int_{a_1}^x |(f_n-f_m)(s)|^2 ds \right. \\
&+ \left. \int_x^{a_2} |a_2-s|^2 ds \int_x^{a_2} |(f_n-f_m)(s)|^2 ds \right] dx = 0.
\end{aligned}$$

Jono $(D^2u_n) = (f_n)$ suppenee, joten se on Cauchy-jono. Olemme osoittaneet, että funktio u kuuluu avaruuteen $H^2(I)$ ja sen toiselle yleistetylle derivaatalle pätee $D^2u = f$. Vielä on osoitettava, että funktio u kuuluu avaruuteen $H_0^1(I)$. Koska joukko I on äärellismitallinen avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukko, kuuluu funktio u edelläolevan todistuksen nojalla myös avaruuteen $H^1(I)$. Meidän on osoitettava, että itseasiassa funktio u saa nollasta eroavia arvoja vain joukon I kompaktissa osajoukossa. Tarkastellaan hieman muunnettua Greenin funktioita

$$g_n(x,s) = \begin{cases} s - a_1 + \frac{1}{n(a_2-a_1)}, & s \in [a_1, a_1 + \frac{1}{n}] \\ \left(\frac{a_2-x}{a_2-a_1}\right)(s-a_1), & s \in (a_1 + \frac{1}{n}, x] \\ \left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)(a_2-s), & s \in (x, a_2 - \frac{1}{n}) \\ a_2 - s - \frac{1}{n(a_2-a_1)}, & s \in [a_2 - \frac{1}{n}, a_2] \end{cases}.$$

Määrittelemme jonon (f_n) alkioiden avulla uuden jonon

$$u_n^\star(x) = \int_I g_n(x,s) f_n(s) ds.$$

Jaetaan integraali osaväleihin

$$\begin{aligned} u_n^\star(x) &= \int_{a_1}^{a_1+\frac{1}{n}} g_n(x,s) f_n(s) ds + \int_{a_1+\frac{1}{n}}^{x} g_n(x,s) f_n(s) ds \\ &+ \int_{x}^{a_2-\frac{1}{n}} g_n(x,s) f(s) ds + \int_{a_2-\frac{1}{n}}^{a_2} g_n(x,s) f_n(s) ds. \end{aligned}$$

Nyt toinen ja kolmas integraali ovat samat kuin todistuksen alkupuolella, joten meidän tarvitsee tarkastella ainoastaan ensimmäistä ja viimeistä integraalia, eli mitä tapahtuu reunan lähellä. Nyt riittävä ehto funktion u kuulumiselle avaruuteen $H_0^1(I)$ on $u = 0$ reunalla. Tarkastellaan funktiota $g_n(s,x)$ välillä $[a_1, a_1 + \frac{1}{n}]$. Sen arvo on välillä

$$\frac{1}{n(a_2 - a_1)} \leq g_n(x,s) \leq \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{a_2 - a_1}\right).$$

Samalla tavoin käy välillä $[a_2 - \frac{1}{n}, a_2]$. Funktion g_n arvo lähestyy nollaa, kun n kasvaa. Tällöin saadaan raja-arvoksi

$$\lim_{n\to\infty} u_n^\star(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{a_1}^{a_1+\frac{1}{n}} g_n(x,s) f_n(s) ds = 0,$$

koska funktio f_n lähestyy funktiota f ja $\int(0 \cdot f(s))ds = 0$. Olemme osoittaneet, että funktio

$$u(x) = \int_I g_0(x,s) f(s) ds$$

kuuluu operaattorin P määrittelyjoukkoon $H_0^1(I) \cap H^2(I)$. Operaattori P^{-1} on avaruudessa $L^2(I)$ jatkuva ja lauseen 4.2.5 mukaan Hilbert-Schmidt-operaattori. □.

4.3 Operaattorin $D^{(2,2)}$ käänteisoperaattori

Tarkastelemme tulo-operaattoria $L_0 = P_1 P_2$ ja sen Friedrichs-jatkoa L.

Lause 4.3.1 *Operaattori L_0 on avaruudessa $L^2(R)$ symmetrinen ja multi-indeksillä Γ^* $H_0^{\Gamma^*}(R)$-elliptinen. Operaattorin L_0 Friedrichs-jatkon L määrittelyjoukko on*

$$D(L) = H_0^{\Gamma^*}(R) \cap H^{2\Gamma^*}(R)$$

ja sen Friedrichs-jatko L on itseadjungoitu.

Todistus Symmetria seuraa osittaisintegroinnilla funktioille u ja v avaruudesta $C_0^\infty(R)$

$$(L_0 u, v)_0 = (D^{(2,2)} u, v)_0 = (u, D^{(2,2)} v)_0 = (u, L_0 v)_0.$$

Olkoon $H_0^{\Gamma^*}(R)$ ja $L^2(R)$ kaksi kompleksista Hilbert-avaruutta. Avaruus $H_0^{\Gamma^*}(R)$ on upotettu tiheästi ja jatkuvasti avaruuteen $L^2(R)$. Avaruus $C_0^\infty(R)$ on avaruuden $H_0^{\Gamma^*}(R)$ tiheä aliavaruus. Osittaisintegroinnilla ja Cauchy-Schwartzin epäyhtälön avulla on funktioille u ja v avaruudesta $C_0^\infty(R)$ vakiolla $c = 1$ voimassa määritelmän 3.2.3 ehto (1). Gårdingin epäyhtälö 3.2.3.2 on avaruuden $C_0^\infty(R)$ funktiolle u voimassa vakioilla $p = 1$ ja $q = 0$. Friedrichs-jatkon määritelmän 3.2.11 mukaan on operaattorin L_0 jatkon L määrittelyalue

$$D(L) = \{u \in H_0^{\Gamma^*} \mid \exists w \in L^2(R) \text{ kaikille } u, v \in H_0^{\Gamma^*}, \text{ pätee } s_{L_0}(u, v) = (w, v)_0\}.$$

Jos jollekin funktiolle u avaruudesta $H_0^{\Gamma^*}$ on heikko derivaatta $D^\alpha u$ olemassa, missä multi-indeksi α kuuluu joukkoon $2\Gamma^*$, voimme kirjoittaa yllä olevassa operaattorin L määrittelyjoukossa

$$w = D^\alpha u.$$

Täten on voimassa

$$H_0^{\Gamma^*} \cap H^{2\Gamma^*} \subset D(L).$$

Määritelmän mukaan on voimassa $D(L) \subset H_0^{\Gamma^*}$, joten on vielä osoitettava $D(L) \subset H^{2\Gamma^*}$. Olkoon funktio u operaattorin L määrittelyjoukossa. On olemassa sellainen funktio w avaruudessa $L^2(R)$, jolle on kaikille funktiolle v avaruudesta $C_0^\infty(R)$ voimassa

$$(D^\alpha u, D^\alpha v)_0 = (w, v)_0.$$

Osittaisintegroinnin nojalla on kaikille funktioille u avaruudessa $C_0^\infty(R)$ voimassa

$$(u, D^{2\alpha} v)_0 = (w, v)_0,$$

joten funktio w avaruudessa $L^2(R)$ on funktion u heikko derivaatta ja funktio u kuuluu avaruuteen $H^{2\Gamma^*}(R)$. Operaattorin L_0 symmetrisyydestä seuraa Friedrichs-jatkon L itseadjungoituvuus.

Lause 4.3.2 *Olkoon operaattorille L_0 muodostettu Friedrichs-jatko $L : D(L) \to L^2(R)$ bijektio. Käänteisoperaattori $L^{-1} : L^2(R) \to D(L)$ on jatkuva. Funktiolle f avaruudesta $L^2(R)$ on voimassa*

$$L^{-1}f(x, y) = \int_R g(x, y; s, t) f(s, t) ds dt,$$

missä $g : R \times R \to \mathbb{R}$ on Greenin funktio,

$$g(x, y; s, t) := \frac{1}{(c-a)(d-b)} \cdot \begin{cases} (s-a)(c-x)(t-b)(d-y), & s \leq x \quad t \leq y \\ (s-a)(c-x)(y-b)(d-t), & s \leq x \quad t > y \\ (x-a)(c-s)(t-b)(d-y), & s > x \quad t \leq y \\ (x-a)(c-s)(y-b)(d-t), & s > x \quad t > y \end{cases}.$$

Koska funktio g kuuluu tuloavaruuteen $L^2(R \times R)$, on L^{-1} Hilbert-Schmidt-operaattori.

Todistus Multi-indeksijoukolle $\Gamma = \{(1, 1)\}$ on operaattori L_0 on $H_0^\Gamma(R)$-elliptinen. Friedrichs-jatkojen P_1 ja P_2 käänteisoperaattorit P_1^{-1} ja P_2^{-1} ovat lauseen 4.2.6 mukaan Hilbert-Schmidt-operaattoreita. Integraalioperaattorin L^{-1} ydin g on rajoitettu ja se kuuluu avaruuteen $L^2(R \times R)$, missä avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko R on mitallinen. Käänteisoperaattori L^{-1} on avaruudessa $L^2(R)$ jatkuva ja lauseen 4.2.5 mukaan Hilbert-Schmidt-operaattori. □

Lause 4.3.3 *Olkoon multi-indeksijoukko $\Gamma^* = \{(1,1)\}$ ja operaattoriin $Lu = D^{(2,2)}u$ liittyvän Friedrichs-jatkon L määrittelyjoukko*

$$D(L) = H_0^{\Gamma^*}(R) \cap H^{2\Gamma^*}(R).$$

Friedrichs-jatko $L : D(L) \to L^2(R)$ on positiivinen.

Todistus Funktiolle u joukosta $D(L)$ on voimassa osittaisintegroinnin nojalla

$$(Lu, u)_0 = (D^{(2,2)}u, u)_0 = (D^{(1,1)}u, D^{(1,1)}u)_0 = ||D^{(1,1)}u||^2 \geq 0,$$

joten itseadjungoitu ja symmetrinen operaattori L on positiivinen. □

Lause 4.3.4 *Operaattori L^{-1} on symmetrinen, positiivinen ja itseadjungoitu avaruudessa $L^2(R)$.*

Todistus Olkoon mielivaltaisille funktiolle f ja g joukosta $D(L^{-1}) = L^2(R)$ voimassa $f = Lu$ ja $g = Lv$, missä funktiot u ja v kuuluvat operaattorin L määrittelyjoukkoon $D(L)$. Operaattorin L symmetrian nojalla pätee

$$(L^{-1}f, g)_0 = (L^{-1}Lu, Lv)_0 = (u, Lv)_0 = (Lu, v)_0 = (f, L^{-1}v)_0,$$

joten operaattori L^{-1} on symmetrinen. Käänteisoperaattorin positiivisuus periytyy operaattorilta L, koska pätee

$$(L^{-1}f, f)_0 = (u, Lu)_0 \geq 0.$$

Lauseen 4.3.2 mukaan käänteisoperaattori L^{-1} on jatkuva, joten itseadjungoituvuuteen riittää

$$(L^{-1}v, v)_0 \in \mathbb{R},$$

kun funktio v kuuluu avaruuteen $L^2(R)$, mikä on voimassa positiivisuuden takia.

Lause 4.3.5 *Operaattori L^{-1} on avaruudessa $L^2(R)$ kompakti*

Todistus Operaattorilla L^{-1} on määrittelyjoukko $D(L^{-1}) = L^2(R)$ ja arvojoukko

$$R(L^{-1}) = D(L) = H_0^{\Gamma^*}(R) \cap H^{2\Gamma^*}(R).$$

Operaattori on jatkuva eli kuvaus avaruudesta $L^2(R)$ avaruuteen $H_0^{\Gamma^*}(R) \cap H^{2\Gamma^*}(R)$ on jatkuva. Avaruus $H_0^{\Gamma^*}(R)$ on upotettu kompaktisti avaruuteen $L^2(R)$, joten myös avaruuden $H_0^{\Gamma^*}(R)$ osajoukon upotus avaruuteen $L^2(R)$ on kompakti. Toisaalta jokainen Hilbert-Schmidt-operaattori on kompakti. □

4.4 Säännöllisyystuloksia

Kirjoitamme tehtävän 3.3.3 uudestaan operaattorille A. Siihen liittyvä seskvilineaarimuoto on $s_A(u, v) = (Au, v)_0$. Olkoon $R = (a, c) \times (b, d)$ ja multi-indeksijoukko $\Gamma = \{(1, 1)\}$.

Tehtävä 4.4.1 *Etsi annetulle funktiolle $f \in L^2(R)$ kaikki sellaiset funktiot $u \in H_0^\Gamma$, jotka toteuttavat kaikille funktioille $v \in H_0^\Gamma$ yhtälön*

$$s_A(u, v) = (f, v)_0.$$

Lause 4.4.2 *Olkoon seskvilineaarimuoto $s_A(\cdot,\cdot)$ H_0^Γ-koersiivinen ja tehtävä 4.4.1 yksikäsitteisesti ratkaistavissa. Tällöin on funktioon $f \in H^{(s,t)}(R)$ missä pätee $s, t \in \mathbb{N}_0$, liittyvä ratkaisufunktio*

$$u \in H^{(s+2,t+2)} \cap H_0^\Gamma(R)$$

ja on olemassa sellainen funktiosta $f \in H^{(s,t)}(R)$ riippumaton vakio $c_{st} \in \mathbb{R}^+$, jolle on voimassa

$$||u||_{s+2,t+2} \leq c||f||_{s,t}.$$

Todistus Katso lähteestä [5] lause 3.5 sivulla 196.

Lause 4.4.3 *Jos lauseen 4.4.2 oletukset ovat voimassa luvuille $k - [\frac{1}{2}n] - 1 \geq 0$ ja $f \in H^{(k,k)}(R)$, niin tehtävän 4.4.1 ratkaisufunktio*

$$u \in C^{k-[\frac{1}{2}n]+1}(R) \cap H_0^\Gamma(R).$$

Todistus Lauseen 4.4.2 perusteella on voimassa

$$u \in H^{(k+2,k+2)}(R) \cap H_0^\Gamma(R).$$

Koska pätee $H^{(k+2,k+2)}(R) \subset H^{k+2}(R)$, on Sobolevin upotuslauseen (Adams [1] lause 5.4 sivulla 97) perusteella voimassa

$$u \in C^{k-[\frac{1}{2}n]+1}(R) \cap H_0^\Gamma(R). \;\square$$

Luku 5

Ominaisarvotehtävä

Olkoon tässä luvussa e reaaliarvoinen funktio avaruudessa $L^\infty(R)$ ja sen arvo $e(x,y) \neq 0$ koko alueessa $R = (a,c) \times (b,d) \subset \mathbb{R}^2$. Lisäksi olkoon f annettu funktio avaruudesta $L^2(R)$ ja λ kompleksiluku. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöä

$$Lu(x,y) - \lambda e(x,y)u(x,y) = f(x,y). \tag{5.1}$$

Operaattorin L määrittelyjoukko $D(L)$ on $H_0^{\Gamma^*}(R) \cap H^{2\Gamma^*}(R)$, missä multi-indeksijoukko Γ^* on $\{(1,1)\}$. Etsimme sellaisia funktioita u avaruudesta $D(L)$, jotka toteuttavat yhtälön (5.1). Sellaisia kompleksilukuja λ, joille on olemassa ainakin yksi ratkaisufunktio $u \neq 0$ avaruudesta $D(L)$, kutsutaan yhtälön $(L - \lambda E)u = 0$ ominaisarvoksi. Funktiota $u \neq 0$ avaruudesta $D(L)$ kutsutaan tällöin ominaisarvoon λ liittyväksi ominaisfunktioksi. Luku $\lambda = 0$ ei ole ominaisarvo, koska yhtälöllä $Lu = 0$ on tällöin yksikäsitteinen ratkaisu $u = L^{-1}0 = 0$, sillä operaattori L on bijektio. Tässä luvussa osoitamme ensiksi, että operaattori $L^{-1}E$ ei ole itseadjungoitu. Löydämme kuitenkin itseadjungoidun operaattorin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$, jolla on samat ominaisarvot kuin operaattorilla $L^{-1}E$. Nyt voimme siis käyttää itseadjungoidulle operaattorille olevia ominaisarvotuloksia.

5.1 Määritelmiä

Olkoon olemassa positiivinen vakio c, jolle melkein kaikkialla joukossa R pätee $|e(x,y)| \geq c$. Tällöin on olemassa funktio

$$e^\diamond(x,y) := \frac{1}{e(x,y)},$$

joka on melkein kaikkialla joukossa R rajoitettu vakiolla $\frac{1}{c}$ ja funktio $e^\diamond$ kuuluu avaruuteen $L^\infty(R)$. Koska funktio e kuuluu avaruuteen $L^\infty(R)$, on olemassa vakio $M = \operatorname{esssup} h$, jolle on melkein kaikkialla joukossa R voimassa $|e(x,y)| \leq M$.

Määritelmä 5.1.1 *Määrittelemme Hilbert-avaruudessa $L^2(R)$ tulo-operaattorin E seuraavalla tavalla. Operaattorin määrittelyjoukko on $D(E) := L^2(R)$ ja*

$$Eu(x,y) := e(x,y)u(x,y)$$

kaikille funktioille u joukossa $D(E)$.

Operaattori E on lineaarinen. Lisäksi se on rajoitettu, koska on voimassa

$$||Eu||_0^2 = \int_R |e(x,y)u(x,y)|^2 dxdy \leq M^2 \int_R |u(x,y)|^2 dxdy = M^2||u||_0^2.$$

Olkoon $Eu = e(x,y)u(x,y) = 0$ melkein kaikkialla joukossa R. Koska funktion e arvo $e(x,y)$ on nollasta eroava koko joukossa R, on siis funktio $u(x,y) = 0$ melkein kaikkialla joukossa R ja operaattori E injektio. Operaattori E on itseadjungoitu, jonka todistamiseksi riittää jatkuvuuden perustella osoittaa, että operaattori E on symmetrinen. Koska funktion arvo $e(x,y)$ on reaalinen, pätee

$$(Eu,v)_0 = \int_R \overline{e(x,y)u(x,y)}v(x,y)dxdy = \int_R \overline{u(x,y)}e(x,y)v(x,y)dxdy = (u,Ev)_0.$$

Operaattorin E kuvajoukko on $L^2(R)$. Valitaan mielivaltaisesti funktio v avaruudesta $L^2(R)$. Tällöin on funktion e oletusten perusteella voimassa

$$u(\cdot) := e^\diamond(\cdot)v(\cdot) \in L^2(R) \text{ ja } Eu(\cdot) = e(\cdot)u(\cdot) = v(\cdot).$$

Operaattori $E : L^2(R) \to L^2(R)$ on siis bijektio. Käänteisoperaattorin E^{-1} määrittelyjoukko on $D(E^{-1}) := L^2(R)$ ja $E^{-1}v := u$, kun funktio $v = Eu$ kuuluu avaruuteen $D(E^{-1})$. Käänteisoperaattori E^{-1} on tulo-operaattori, koska funktiolle v avaruudesta $D(E^{-1})$ on voimassa melkein kaikkialla joukossa R

$$e^\diamond(x,y)v(x,y) = e^\diamond(x,y)Eu(x,y) = \frac{1}{e(x,y)}u(x,y)e(x,y) = u(x,y) = E^{-1}v(x,y).$$

Koska on voimassa $|e(x,y)| \leq M$ melkein kaikkialla joukossa R, niin pätee myös

$$|e^\diamond(x,y)| = \left|\frac{1}{e(x,y)}\right| \leq \frac{1}{M} < \infty$$

melkein kaikkialla joukossa R. Samalla tavalla kuin operaattori E on käänteisoperaattori E^{-1} rajoitettu ja jatkuva.

5.2 Operaattoreiden $L^{-1}E$ ja $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ ominaisarvot

Sovellamme yhtälöön $(L - \lambda E)u = 0$ bijektiivistä operaattoria $-\mu L^{-1}$, missä kompleksiluku $\mu := \frac{1}{\lambda}$ ja $\lambda \neq 0$, eli

$$(L^{-1}E - \mu I)u = 0.$$

Etsimme siis ominaisarvoja μ operaattorille $L^{-1}E$. Kompleksiluku μ on täsmälleen silloin operaattorin $L^{-1}E$ ominaisarvo, kun kompleksiluku λ on yhtälön

$$(L - \lambda E)u = 0$$

ominaisarvo. Operaattori $L^{-1}E$ on määritelty avaruudessa $L^2(R)$. Funktioille u ja Eu avaruudesta $L^2(R)$, koska operaattorin L^{-1} määrittelyjoukko $D(L^{-1})$ on $L^2(R)$, on samaistus määritelty järkevästi. Koska operaattori L^{-1} on lauseiden 4.3.4 ja 4.3.5 perusteella itseadjungoitu ja kompakti sekä operaattori E jatkuva, niin operaattoritulo $L^{-1}E$ on lemman 3.1.20 perusteella kompakti.

Lause 5.2.1 *Operaattori $L^{-1}E$, jonka määrittelyjoukko on $D(L^{-1}E) = L^2(R)$, ei yleensä ole itseadjungoitu.*

Todistus Koska operaattorit L^{-1} ja E ovat itseadjungoituja, on voimassa

$$(L^{-1}E)^* = E^*(L^{-1})^* = EL^{-1}.$$

Operaattori $L^{-1}E$ on siis täsmälleen silloin itseadjungoitu, kun pätee

$$EL^{-1} = L^{-1}E.$$

Riittää osoittaa ristiriita, kun $R = (0,1) \times (0,1)$, $e(x,y) = x + 1$ ja $u \equiv 1$. Tällöin on Greenin funktiossa (4.4) $g(x,y;s,t)$ voimassa $a = b = 0$ ja $c = d = 1$

$$\begin{aligned}
(L^{-1}E - EL^{-1})u(x,y) &= \int_R g(x,y;s,t)e(s,t)u(s,t)dsdt - e(x,y)\int_R g(x,y;s,t)dsdt \\
&= \int_R g(x,y;s,t)[e(s,t) - e(x,y)]u(s,t)dsdt = \int_0^1\int_0^1 g(x,y;s,t)(s-x)dsdt \\
&= (1-x)(1-y)\int_0^y t\int_0^x s(s-x)dsdt + (1-x)y\int_y^1 (1-t)\int_0^x s(s-x)dsdt \\
&+ x(1-y)\int_0^y t\int_x^1 (1-s)(s-x)dsdt + xy\int_y^1 (1-t)\int_x^1 (1-s)(s-x)dsdt \\
&= \frac{y^2}{2}(1-x)(1-y)\int_0^x (s^2 - sx)ds + \frac{y}{2}(1-x)(1-y)^2\int_0^x (s^2 - sx)ds \\
&+ \frac{xy^2}{2}(1-y)\int_x^1 (s - s^2 - x + sx)ds + \frac{xy}{2}(1-y)^2\int_x^1 (s - s^2 - x + sx)ds \\
&= \frac{-x^3y^2}{12}(1-x)(1-y) - \frac{x^3y}{12}(1-x)(1-y)^2 \\
&+ \frac{xy^2}{12}(1-y)(1-x)^3 + \frac{xy}{12}(1-y)^2(1-x)^3 \\
&= \frac{xy}{12}(1-x)(1-y)\left[y(1-x)^2 + (1-y)(1-x)^2 - x^2\right] \\
&= \frac{xy}{12}(1-x)(1-y)(1-2x).
\end{aligned}$$

Arvoilla (x,y) alueesta R on yllä oleva lauseke vain arvolla $x = \frac{1}{2}$ nolla, joten pätee

$$EL^{-1} \neq L^{-1}E. \quad \square$$

Luku $\mu = 0$ ei ole operaattorin $L^{-1}E$ ominaisarvo, koska on olemassa funktio $u \in L^2(R)$, jolle on voimassa

$$L^{-1}Eu = 0,$$

eli $Eu = L0 = 0$ ja siten operaattorin E injektiivisyyden nojalla myös $u = 0$. Operaattorin $L^{-1}E$ kompaktisuuden perusteella voimme soveltaa lausetta 3.2.8 operaattoriin $L^{-1}E$ sekä yhtälöihin

$$(L - \lambda E)u = 0 \quad \text{ja} \quad (L - \lambda E)u = f.$$

Lause 5.2.2 *Operaattorilla $L^{-1}E$ on avaruudessa $L^2(R)$ korkeintaan numeroituva määrä ominaisarvoja $\mu \in \mathbb{C}$, joiden kasaantumispiste on 0. Yhtälöllä*

$$(L - \lambda E)u = 0$$

on korkeintaan numeroituva määrä ominaisarvoja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, joiden kasaantumispisteenä voi olla ∞. Jokaiselle kompleksiluvulle λ, joka ei ole ominaisarvo, on yhtälö

$$(L - \lambda E)u = f$$

mielivaltaiselle funktiolle $f \in L^2(R)$ yksikäsitteisesti ratkaistavissa. Jokaisella ominaisarvolla $\lambda \in \mathbb{C}$ on äärellinen kertaluku.

Todistus Lause seuraa lauseesta 3.2.8 ja operaattorin $L^{-1}E$ ominaisuuksista. Lukua

$$\mu = 0 \in \sigma(L^{-1}E),$$

joka ei ole operaattorin $L^{-1}E$ ominaisarvo, vastaa luku $\lambda = \infty \notin \mathbb{C}$. Siten on yhtälön spektri sama kuin pistespektri ja kaikki muut luvut $\lambda \in \mathbb{C}$ kuuluvat resolventtijoukkoon. □

Koska meidän tapauksessa on koko alueessa R voimassa $e(x, y) > 0$, voimme tarkastella uutta operaattoria, jolla on samat ominaisarvot kuin operaattorilla $L^{-1}E$, mutta joka on myös itseadjungoitu. Määrittelemme kerroinoperaattorin $E^{\frac{1}{2}}$, jolla on ominaisuus $E^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}} = E$.

Määritelmä 5.2.3 *Määritellään kaikille pisteille x ja y alueesta R ja annetulle funktiolle e uusi funktio $e^{\frac{1}{2}} : R \to \mathbb{C}$ seuraavasti*

$$e^{\frac{1}{2}}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{e(x, y)}, & kun\ e(x, y) > 0 \\ i\sqrt{-e(x, y)}, & kun\ e(x, y) < 0 \end{cases} .$$

Tällöin on voimassa $e^{\frac{1}{2}}(x, y)e^{\frac{1}{2}}(x, y) = e(x, y)$.

Määritelmä 5.2.4 *Operaattorin $E^{\frac{1}{2}}$ määrittelyjoukko on $D(E^{\frac{1}{2}}) := L^2(R)$ ja*

$$E^{\frac{1}{2}}u(x, y) := e^{\frac{1}{2}}(x, y)u(x, y),$$

kun funktio u kuuluu joukkoon $D(E^{\frac{1}{2}})$.

Operaattori $E^{\frac{1}{2}}$ on lineaarinen, jatkuva, injektiivinen ja itseadjungoitu. Operaattorin $E^{\frac{1}{2}}$ kuvajoukko on $L^2(R)$ ja kuvaus $E^{\frac{1}{2}} : L^2(R) \to L^2(R)$ on bijektio. Käänteisoperaattorin $E^{-\frac{1}{2}}$ määrittelyjoukko on $D(E^{-\frac{1}{2}}) := L^2(R)$ ja $E^{-\frac{1}{2}}v := u$, kun $v = E^{\frac{1}{2}}u \in D(E^{\frac{1}{2}})$. Olkoon

$$e^{-\frac{1}{2}}(x, y) := \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}(x, y)}$$

koko joukossa R. Tällöin funktiolle v joukosta $D(E^{-\frac{1}{2}})$ on voimassa

$$e^{\frac{1}{2}}(x, y)v(x, y) = e^{-\frac{1}{2}}(x, y)E^{\frac{1}{2}}u(x, y) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}(x, y)}e^{\frac{1}{2}}(x, y)u(x, y) = u(x, y) = E^{-\frac{1}{2}}v(x, y).$$

Samalla tavoin kuin operaattori E^{-1} on operaattori $E^{-\frac{1}{2}}$ rajoitettu.

Lause 5.2.5 *Operaattori $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ on positiivinen, itseadjungoitu ja kompakti.*

Todistus Operaattoreista L^{-1} on kompakti ja $E^{\frac{1}{2}}$ on jatkuva. Lemman 3.1.20 mukaan on operaattoreiden L^{-1} ja $E^{\frac{1}{2}}$ tulo kompakti. Operaattori $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ on jatkuva. Itseadjungoituvuuden todistamiseksi riittää osoittaa, että operaattori on symmetrinen. Funktiolle u ja v avaruudesta $L^2(R)$ on voimassa

$$(E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}u, v)_0 = (L^{-1}E^{\frac{1}{2}}u, E^{\frac{1}{2}}v)_0 = (E^{\frac{1}{2}}u, L^{-1}E^{\frac{1}{2}}v)_0 = (u, E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}v)_0.$$

Koska operaattori $E^{\frac{1}{2}}$ on itseadjungoitu ja L^{-1} positiivinen, on voimassa

$$(E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}u, u)_0 = (L^{-1}E^{\frac{1}{2}}u, E^{\frac{1}{2}}u)_0 \geq 0. \ \square$$

Lause 5.2.6 *Kompleksiluku μ on täsmälleen silloin operaattorin $L^{-1}E$ ominaisarvo, jos se on operaattorin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ ominaisarvo. Operaattorin $L^{-1}E$ ominaisarvoon μ liittyy ominaisfunktio u avaruudesta $L^2(R)$, jos $E^{\frac{1}{2}}u$ avaruudesta $L^2(R)$ on ominaisfunktio operaattorin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ ominaisarvolle μ. Ominaisarvolla μ on sama kertaluku molemmille operaattoreille.*

Todistus Olkoon kompleksiluku $\mu \neq 0$, operaattorin $L^{-1}E$ ominaisarvo ja funktio $u \neq 0$ avaruudesta $L^2(R)$, vastaava ominaisfunktio

$$L^{-1}Eu = \mu u.$$

Koska operaattorin $E^{\frac{1}{2}}$ määrittelyjoukko on $D(E^{\frac{1}{2}}) = L^2(R)$ ja $E = E^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$, voimme kirjoittaa

$$E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}u = \mu E^{\frac{1}{2}}u.$$

Koska funktion e arvo $e(x, y) \neq 0$ ja funktio $u \neq 0$, on

$$E^{\frac{1}{2}}u = e^{\frac{1}{2}}u \neq 0$$

ja siten kompleksiluku μ on operaattorin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ ominaisarvo ja $E^{\frac{1}{2}}u$ vastaava ominaisfunktio. Olkoon kompleksiluku μ operaattorin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ nollasta eroava ominaisarvo. Funktiolle $v \neq 0$ avaruudesta $L^2(R)$ on voimassa

$$E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}v = \mu v.$$

Koska operaattorin $E^{-\frac{1}{2}}$ määrittelyjoukko on $L^2(R)$, voimme käyttää operaattoria $E^{-\frac{1}{2}}$. Lisäksi on voimassa

$$L^{-1}E^{\frac{1}{2}}v = \mu E^{-\frac{1}{2}}v \text{ ja } L^{-1}EE^{-\frac{1}{2}}v = \mu E^{-\frac{1}{2}}v.$$

Koska funktio e on reaaliarvoinen ja $e(x, y) \neq 0$, on voimassa $e^{\frac{1}{2}}(x, y) \neq 0$ ja $e^{-\frac{1}{2}}(x, y) > 0$. Koska funktio $v \neq 0$, $E^{-\frac{1}{2}}v = e^{-\frac{1}{2}}v \neq 0$ ja kompleksiluku μ on ominaisarvo operaattorille $L^{-1}E$ ja $E^{-\frac{1}{2}}v$ vastaava ominaisfunktio. Luku $\mu = 0$ ei ole operaattorin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}e^{\frac{1}{2}}$ ominaisarvo. Asetetaan

$$E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}u = 0$$

ja käytämme yhtälöön peräkkäin operaattoreita $E^{-\frac{1}{2}}$, L^{-1} ja $E^{-\frac{1}{2}}$. Nämä operaattorit eivät muuta yhtälön oikeata puolta. Koska saamme $u = 0$, ei ole olemassa yhtään ominaisfunktiota $u \neq 0$ ja $\mu = 0$ ei ole ominaisarvo. Olkoon $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ operaattoreiden $L^{-1}E$ ja $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$

ominaisarvo. Operaattorin $L^{-1}E$ kompaktisuudesta johtuen on tähän operaattoriin liittyvällä ominaisarvolla μ äärellinen kertaluku. Samoin on operaattoriin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ liittyvällä ominaisarvolla μ äärellinen kertaluku. $\square$

Kun koko alueessa R pätee $e > 0$, voimme laajentaa lausetta 5.2.2. Olkoon $\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}$.

Lause 5.2.7 *Koska funktio e on positiivinen, on jokainen operaattorin $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ ominaisarvo μ lauseen 3.2.10 perusteella positiivinen. Tällöin on yhtälöllä*

$$(L - \lambda E)u = 0$$

vain positiivisia ominaisarvoja λ, joilla on äärellinen kertaluku. Luvuille $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ ja niille luvuille $\lambda \in \mathbb{R}^+$, jotka eivät ole ominaisarvoja, on yhtälö

$$(L - \lambda E)u = f$$

mielivaltaiselle funktiolle $f \in L^2(R)$ yksikäsitteisesti ratkaistavissa. Eri yhtälön

$$(L - \lambda E)u = 0$$

ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat keskenään ortogonaaleja.

Todistus Lause seuraa operaattoreiden $L^{-1}E$ ja $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ ominaisuuksista sekä lauseista 3.2.7 ja 3.2.10. Erikoisesti on operaattori $E^{\frac{1}{2}}L^{-1}E^{\frac{1}{2}}$ itseadjungoitu ja positiivinen eikä luku $\mu = 0$ ole näiden operaattoreiden ominaisarvo. Tutkimme yhtälön

$$(L - \lambda E)u = 0$$

ominaisarvoille λ, minkälaisille funktioille $f \in L^2(R)$ yhtälö

$$(L - \lambda E)v = f \tag{5.2}$$

on ratkeava ja miten yksikäsitteinen se on funktiolle $v \in D(L)$. Merkitään $A := L - \lambda E$, missä pätee

$$D(A) = D(L) = H_0^1(R) \cap H^2(R),$$

ja kirjoitetaan vastaava seskvilineaarimuoto

$$s_A(u, v) = (Au, v)_0,$$

missä funktiot $u, v \in D(L)$. Tälle seskvilineaarimuodolle on jokaiselle reaaliselle luvulle λ, siis erityisesti ominaisarvoille, kiinteällä reaaliarvoisella funktiolla e voimassa

$$\begin{aligned} s_A(u, v) = (Tu, v)_0 &= (Lu - \lambda e(\cdot)u, v)_0 = (Lu, v)_0 - \lambda(e(\cdot)u, v)_0 \\ &= (u, Lv)_0 - \lambda \int_R e(x, y)\overline{u(x, y)}v(x, y)dx \\ &= (u, Lv)_0 - \lambda(u, e(\cdot)v)_0 = (u, Lv - \lambda e(\cdot)v)_0 = \overline{s_A(u, v)}. \end{aligned}$$

Seskvilineaarimuodon s_A avulla voimme kirjoittaa yhtälön (5.2) kaikille funktiolle $\psi \in C_0^\infty(R)$ ekvivalentiin muotoon

$$s_A(v, \psi) = (f, \psi)_0. \tag{5.3}$$

Kun λ on ominaisarvo, voimme korvata esityksen $(L - \lambda E)u = Au = 0$ ominaisvektorilla $u \neq 0$

$$s_A(u, \phi) = 0, \tag{5.4}$$

missä $\phi \in C_0^\infty(R)$. Kun sijoitamme yhtälöön (5.4) funktion ϕ paikalle yhtälön (5.2) ratkaisun $v \in D(L)$ ja yhtälöön (5.3) ominaisvektorin u funktion ψ paikalle, saamme seskvilineaarimuodon jatkuvuuden perusteella yhtälöparin

$$s_A(v, u) = (f, 0)_0 \quad \text{ja} \quad s_A(u, v) = 0.$$

Koska seskvilineaarimuoto s_A on hermiittinen, on voimassa

$$(f, u)_0 = 0,$$

joten ominaisarvo λ antaa yhtälölle (5.2) tasan silloin ainakin yhden ratkaisun v, kun funktio f on ortogonaalinen yhtälön

$$(L - \lambda E)u = 0$$

ominaisarvoja kohti. Tämä ratkaisu v on mielivaltaisella ominaisvektorilla kertomista vaille yksikäsitteinen ominaisarvolle λ. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Adams, R. A.: *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, San Francisco, London. 1975.

[2] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. painos. 1992.

[3] Courant, R. ja D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik 1.* Verlag von Julius Springer, Berlin. 1924.

[4] Courant, R. ja D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik 2.* Verlag von Julius Springer, Berlin. 1937.

[5] Doppel, K. ja R. Hochmuth: *On the regularity of solutions of a homogeneous Dirichlet problem for a non-hypoelliptic linear partial differential operator.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **16**, s. 183–198. 1991.

[6] Doppel, K. ja N. Jacob: *A non-hypoelliptic Dirichlet problem from stochastics.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **8**, s. 375–390. 1983.

[7] Germar, R.: *Anisotrope Differentialoperatoren höherer Ordnung aus der Elastigtätstheorie.* Väitöskirja, Freie Universität Berlin, 1995. Univ. Jyväskylä Math. Inst. Berichte 64.

[8] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis Teil 1.* B. G. Teubner, Stuttgart, 8. painos. 1990.

[9] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis Teil 2.* B. G. Teubner, Stuttgart, 6. painos. 1991.

[10] Heuser, H.: *Funktionalanalysis.* B. G. Teubner, Stuttgart, 3. painos. 1992.

[11] Hirzebruch, F. ja W. Scharlau: *Einführung in die Funktionalanalysis.* Numero 296a^* sarjassa B.I-Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut AG, Mannheim, Wien, Zürich. 1971.

[12] Hochmuth, R.: *Regularitätsresultate für ein Randwertproblem einer nicht-hypoelliptischen linearen partiellen Differentialgleichung.* Väitöskirja, Freie Universität Berlin, 1989.

[13] Hochmuth, R.: *An inhomogeneous Dirichlet problem for a non-hypoelliptic linear partial differential operator.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **21**, s. 179–187. 1996.

[14] Hörmander, L.: *Linear partial differential operators.* Numero 116 sarjassa Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer-Verlag, Berlin. 1963.

[15] Jacob, N.: *Bemerkungen über verallgemeinerte homogene lineare Dirichlet probleme.* Väitöskirja, Freie Universität Berlin, 1980.

[16] Jacob, N.: *Lineare partielle Differentialgleichungen.* Akademie Verlag GmbH., Berlin. 1995.

[17] Louhivaara, I. S. ja C. G. Simader: *Über nichtelliptische lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **513**, s. 1–22. 1972.

[18] Louhivaara, I. S. ja C. G. Simader: *Über periodischen Lösungen koerzitiven linearen partiellen Differentialgleichungen.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **4**, s. 87–108. 1978/79.

[19] Mangeron, D.: *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali de quart'ordine con le caratteristiche reali doppie.* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli **2**, s. 29–40. 1932.

[20] Mangeron, D.: *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart'ordine con le caratteristiche reali doppie.* Giorn. Mat. Battaglini **71 [(3) 24]**, s. 89–139. 1933.

[21] Miranda, C.: *Partial Differential Equations of Elliptic Type.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2 painos. Translation of Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, 1955. 1970.

[22] Pehkonen, E.: *Regularität der schwachen Lösungen linearer quasielliptischer Dirichletprobleme.* Väitöskirja, Universität Jyväskylä, 1976. Univ. Jyväskylä Math. Inst. Berichte 16.

[23] Picone, M.: *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differentiale lineare ordinare del second'ordine.* Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa **11**, s. 1–141. 1909.

[24] Rauch, J.: *Partial Differential Equations.* Numero 128 sarjassa Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York. 1991.

[25] Renardy, M. ja R. C. Rogers: *An Introduction to Partial Differential Equations.* Numero 13 sarjassa Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag Inc., New York. 1993.

[26] Riesz, F. ja B. Sz.-Nagy: *Vorlesungen über Funktionalanalysis.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 4. painos. 1992.

[27] Schomburg, B.: *Das verallgemeinerte homogene Dirichlet-Problem für Produkte linearer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung.* Väitöskirja, Freie Universität Berlin, 1985.

[28] Simader, C. G.: *On Dirichlet's Boundary Value Problem.* Numero 268 sarjassa Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 1972.

[29] Weidmann, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen.* B. G. Teubner, Stuttgart. 1976.

[30] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, Stuttgart. 1982.